INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · K. MAGNUS · E. METTLER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXVII. BAND VIERTES HEFT 1959

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 6. November 1959

Postverlagsort Berlin

Preis DM 13,60

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Darmstadt, Technische Hochschule, Institut für angewandte Mechanik.
Professor Dr. **K. Magnus**, Stuttgart O, Hackländerstraße 33
Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12
Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Nachdruck: Mit der Annahme des Manuskripts eines Beitrages für das „Ingenieur-Archiv" erwirbt der Springer-Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder, einschließlich des Rechts der photomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung. — Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen nicht vorher an anderer Stelle veröffentlicht worden sein und auch später nicht anderweitig, weder im Inland noch im Ausland, veröffentlicht werden. Ausnahmen von dieser Regel bedürfen einer entsprechenden Vereinbarung zwischen Autor, Herausgeber und Verlag.

Photokopien: Auf Grund des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens ist jedoch die Anfertigung photomechanischer Kopien eines Beitrages gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch gestattet, sofern der Hersteller oder Benutzer jede Seite dieser Kopie mit einer Gebühren-Wertmarke im Betrag von DM 0,30 kenntlich macht. Diese Marken sind zu beziehen vom Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. (Inkasso-Stelle) Frankfurt/M., Großer Hirschgraben 17/19. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.* Die Verpflichtung zur Verwendung von Gebühren-Wertmarken entfällt, falls der Hersteller von Kopien mit dem Springer-Verlag ein Pauschalabkommen über die Kopie-Gebühren-Entrichtung vereinbart hat.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin-Wilmersdorf
Heidelberger Platz 3 / Fernsprecher Sammel-Nr. 83 03 01

Inhalt:

Seite

Ohashi, H., Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Tandem-Pumpengittern starker Umlenkung. Mit 30 Abbildungen 201

Stanišić, M., and *R. M. McKinley*, A note on thermal stresses in hollow cylinders. Mit 5 Abbildungen 227

Klingbeil, E., Zur Theorie der Rotationsschalen vom Standpunkt numerischer Rechnungen. Mit 3 Abbildungen 242

Pestel, E., Anwendung der Deltamatrizen auf inhomogene Probleme. Mit 1 Abbildung 250

Kämmel, G., Zur Theorie des räumlich gekrümmten Stabes. Mit 4 Abbildungen ... 255

Kolberg, F., Der Wellenwiderstand von Schiffen auf flachem Wasser 268

Ōba, R., Theory of flow through profiles with large camber and thickness arranged in cascade with small pitch chord ratio. Mit 12 Abbildungen 276

INGENIEUR-ARCHIV

XXVII. BAND VIERTES HEFT 1959

Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Tandem-Pumpengittern starker Umlenkung*

Von Hideo Ohashi

1. Einleitung und Aufgabenstellung. Beim Entwurf eines Axialverdichters kann manchmal der Fall eintreten, daß die Umlenkung in einer Schaufelreihe so groß sein muß, daß ein einreihiges Gitter diese starke Umlenkung nur mit sehr großen Verlusten verwirklichen kann, z. B. beim Nachleitrad eines Hochdruckaxialverdichters oder beim Leitrad eines Überschallaxialverdichters. In

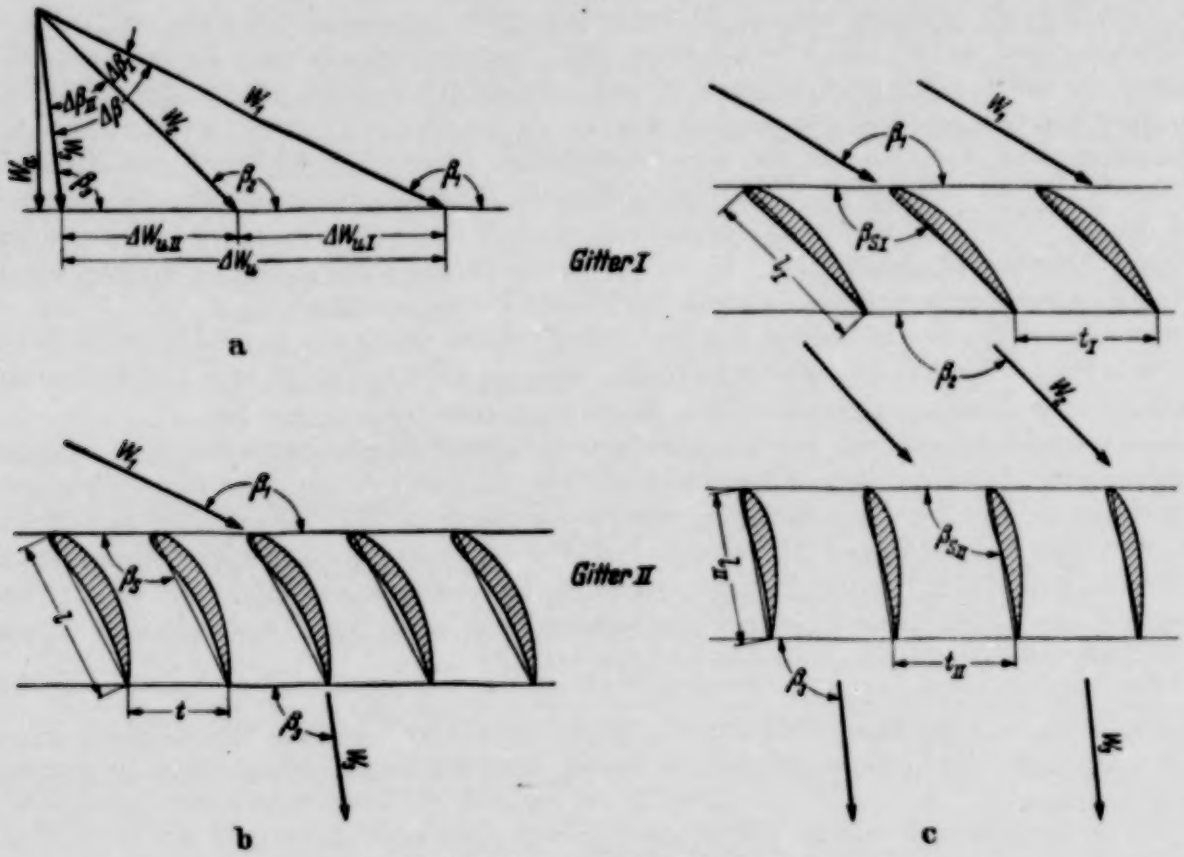


Abb. 1. Bezeichnungen am Schaufelgitter.
a) Geschwindigkeitsdreieck; b) Anordnung als einreihiges Gitter; c) Anordnung als Tandem-Pumpengitter.

solchen Fällen kann man bekanntlich statt einer Schaufelreihe ein aus zwei Schaufelreihen bestehendes Tandem-Pumpengitter benutzen. Durch diese Aufteilung der gesamten Umlenkung auf die beiden Gitter wird die Belastung der einzelnen Gitter etwa halbiert, und dadurch können die Verluste trotz des komplizierteren Strömungsvorganges erheblich vermindert werden (vgl. Abb. 1). Bei der Anwendung des Tandem-Pumpengitters ist es jedoch bis heute üblich gewesen, das Tandem-Gittersystem einfach als zwei selbständige Gitter zu betrachten und die Ergebnisse für Einzelschaufelgitter auf die beiden Gitter einzeln anzuwenden ohne Berücksichtigung der gegenseitigen Interferenz. Diese vereinfachte Behandlung kann bei gewissen Tandem-Anordnungen zu großen

* Gekürzte Fassung der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Braunschweig genehmigten gleichnamigen Dissertation. Berichter: Prof. Dr. *H. Schlichting*; Mitberichter: Prof. Dr. *H. Petermann*. Die Untersuchungen wurden im Institut für Strömungsmechanik der Technischen Hochschule Braunschweig unter der Leitung von Prof. Dr. *H. Schlichting* durchgeführt und durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft und ein Stipendium des Verfassers vom Deutschen Akademischen Austauschdienst ermöglicht. — Bei der Abfassung dieser gekürzten Fassung hat Herr Dr.-Ing. *K. Gersten* mitgewirkt.

Abweichungen von der wirklichen Strömung führen. Außerdem muß man dabei auf die Möglichkeit verzichten, durch Ausnutzen des Interferenzeinflusses eventuell sogar geringere Verluste zu erreichen als ohne Interferenz.

Die vorliegende Arbeit soll die Frage beantworten, mit welcher Anordnung ein Tandem-Pumpengitter eine gegebene Umlenkung mit geringstem Verlust verwirklichen kann, und zwar unter Berücksichtigung der gegenseitigen Interferenz. Eine bestimmte Tandem-Gitteranordnung läßt sich durch acht geometrische Parameter kennzeichnen, nämlich durch die Profilformen, die Schaufelwinkel und die Teilungsverhältnisse der beiden Gitter und durch den Abstand und die Versetzung zwischen den beiden Gittern.

Um eine optimale Tandem-Gitteranordnung für ein gegebenes Geschwindigkeitsdreieck zu bestimmen, muß man zunächst den Einfluß der acht Parameter auf die Verluste einzeln untersuchen und danach die zur optimalen Anordnung gehörenden acht Parameter auswählen.

Die Untersuchungen sind hierbei zweckmäßig in die beiden folgenden Teile aufzuspalten: a) Untersuchungen über die optimalen Tandem-Gitteranordnungen mit unendlich großem Abstand zwischen den beiden Gittern (Änderung der sechs Parameter für die Geometrie der beiden Gitter), b) Untersuchungen über die Änderung der Gittereigenschaften mit dem Abstand und der Versetzung bei festen Anordnungen der beiden Gitter (Änderung der zwei Parameter für die gegenseitige Stellung der beiden Gitter).

Der erste Teil wird hierbei auf Grund der schon vorhandenen systematischen Ergebnisse für ebene Schaufelgitter mit Profilen NACA 0010, 4410 und 8410 behandelt[1]. Es ergeben sich daraus die optimalen Tandem-Gitteranordnungen für ein beliebig gegebenes Geschwindigkeitsdreieck ohne Berücksichtigung der gegenseitigen Interferenz.

Im zweiten Teil, der sich mit der aerodynamischen Interferenz zwischen den beiden Gittern befaßt, werden die Strömungserscheinungen an Tandem-Pumpengittern bei verschiedenen Stellungen der beiden Gitter zueinander auf experimentellem und theoretischem Weg untersucht. Auf Grund der Ergebnisse der beiden Teile kann das in der Praxis vorliegende Entwurfsproblem eines optimalen Tandem-Pumpengitters in einfacher Weise gelöst werden.

Ergänzend wird der Interferenzeinfluß der Dellen vom ersten Gitter auf die Verluste des zweiten Gitters, welcher in Tandem-Pumpengittern sehr ausgeprägt ist, jedoch mit der Potentialtheorie nicht erfaßt werden kann, in vereinfachter Weise experimentell untersucht.

Über den Interferenzeinfluß des Tandem-Schaufelgitters liegen bereits einige experimentelle und theoretische Arbeiten vor. Experimentell hat *K. Fickert*[2] ein Pumpengitter aus Spaltflügeln untersucht, und zwar mit verschiedener Spaltgeometrie. *H. Marcinowski*[3] hat ein Tandem-Pumpengitter mit verschiedenen Abständen und Versetzungen gemessen und einige charakteristische Eigenschaften des Tandem-Pumpengitters herausgestellt. Außerdem hat *H. E. Sheets*[4] ein Pumpengitter aus Spaltflügeln in einem einstufigen Axialverdichter verwandt und damit einen hohen Wirkungsgrad und eine große Förderhöhe erreicht.

Den rein potentialtheoretischen Interferenzeinfluß haben *W. E. Spraglin*[5] und *S. Abe*[6] mit Hilfe der konformen Abbildung sowie *S. Müftüoglu*[7] mit der Singularitätenmethode untersucht. Natürlich kann dabei der in der wirklichen Strömung sehr stark auftretende Reibungseinfluß nicht mit erfaßt werden.

2. Bezeichnungen (vgl. Abb. 1, 11, 20 und 26). Es sollen bedeuten

l	die Schaufeltiefe,
t	die Gitterteilung,
d_{max}	die maximale Schaufeldicke,
$z = x + iy$	die komplexe Koordinate (x in Richtung Schaufelsehne, y senkrecht dazu),
r und s	krummlinige, orthogonale Koordinaten senkrecht und längs der Skelettlinie,

[1] *L. Speidel* und *N. Scholz*, Untersuchungen über die Strömungsverluste in ebenen Schaufelgittern, VDI-Forschungsheft 464 (1957).

[2] *K. Fickert*, Forsch. Ing.-Wesen. 16 (1949/50) S. 141.

[3] *H. Marcinowski*, Messungen an axialen Schaufelgittern für verzögerte Strömung, Bericht Nr. VL 13105, J. M. Voith (1946). Vgl. auch „Das Versuchswesen der Maschinenfabrik J. M. Voith" S. 24 (1949).

[4] *H. E. Sheets*, Transactions ASME, 78 (1956) S. 1683.

[5] *W. E. Spraglin*, Flow through cascades in tandem, NACA TN 2393 (1951).

[6] *S. Abe*, On the mutual interference of neighbouring two cascades composed of hydrofoil or aerofoil profils. Reports of the Institute of High Speed Mechanics, Tôhoku Univ., Vol. 7 (1956).

[7] *S. Müftüoglu*, Strömungsuntersuchungen an Tandem-Schaufelgittern, Jahrbuch 1957 der WGL., S. 208—229.

y_s	die Ordinaten der Skelettlinie,
r_K	die Dickenordinaten der Schaufelkontur,
a	den Abstand zwischen der Hinterkante des ersten Gitters und der Vorderkante des zweiten Gitters, senkrecht zur Gitterfront,
h	die Versetzung der Vorderkante des zweiten Gitters von der Bahnlinie der Nachlaufdelle des ersten Gitters, parallel zur Gitterfront,
z_0	die komplexe Koordinate des zweiten Nullpunktes bezüglich des ersten Koordinatensystems,
b_0 und h_0	die Versetzung der Nullpunkte der beiden Koordinatensysteme senkrecht und parallel zur Gitterfront,
β_S	den Schaufelwinkel,
β_1 und β_3	den Zu- und Abströmwinkel,
β_2	den Zwischenströmwinkel,
$\Delta\beta$	die Umlenkung,
λ	den Staffelungswinkel,
B	die charakteristische Breite einer Delle,
W_1 und W_3	die Geschwindigkeit weit vor und weit hinter dem Tandem-Pumpengitter,
W_2	die Geschwindigkeit zwischen den beiden Gittern bei sehr großem Abstand,
W_∞	die Grundströmungsgeschwindigkeit (vektorielle Mittelgeschwindigkeit von Zu- und Abströmung des einzelnen Gitters),
U_T und V_T	die Geschwindigkeitskomponenten der Translationsströmung,
u und v	die Geschwindigkeitskomponenten der durch Singularitäten induzierten Strömungsgeschwindigkeit,
$\overline{w} = u - i\,v$	die komplexe induzierte Strömungsgeschwindigkeit,
W_A, W_V und W_Z	die Strömungsgeschwindigkeit in Meßebene A, V und Z,
g	den Gesamtdruck,
p	den statischen Druck,
Q	die Quellstärke,
Γ	die Zirkulation,
q	die Quellbelegung,
γ	die Wirbelbelegung,
$\zeta_V = \Delta g / \frac{\varrho}{2} W_a^2$	den Verlustbeiwert,
$\mathrm{Re} = W\,l/\nu$	die *Reynolds*zahl,
ζ'_V	den Energieverlustbeiwert [Definition nach Gleichung (6.1)],
$K = F/F_0$	die Überdeckungsziffer (vgl. Abb. 26).

Als Indizes sollen in folgender Bedeutung benutzt werden:

$*$	zur optimalen Tandem-Gitteranordnung gehörig,
0	zur Strömung ohne gegenseitige Interferenz gehörig,
$j =$ I und II	zum ersten und zweiten Gitter gehörig,
u, a	für Werte in Richtung parallel bzw. senkrecht zur Gitterfront,
q	für Quellbelegung,
γ	für Wirbelbelegung,
K	für Werte auf der Schaufelkontur,
S	für Werte auf der Skelettlinie,
E	für Werte der Einzelschaufel,
G	für Werte des Einzelgitters,
R	für Werte des Restgitters, d. h. für Werte aller übrigen Schaufeln des Einzelgitters außer der betrachteten Einzelschaufel,
J	für Werte von der anderen Schaufelreihe.

3. Optimale Gitteranordnungen des Tandem-Pumpengitters ohne Berücksichtigung der gegenseitigen Interferenz. Gesucht sind die optimalen Tandem-Gitteranordnungen, die ein gegebenes Geschwindigkeitsdreieck mit geringstem Verlust verwirklichen, wobei der Abstand zwischen den beiden Gittern als unendlich groß angesehen wird und infolgedessen die aerodynamische Interferenz nicht in Betracht gezogen ist.

Zur Bestimmung der optimalen Tandem-Gitteranordnungen tritt zunächst die Frage auf, wie die gesamte Umlenkung auf die beiden Gitter verteilt werden soll, um den geringsten Gesamt-

verlust zu erreichen. Die Aufteilung der Umlenkung wird hierbei durch das Belastungsverhältnis $\Delta W_{u\,I}/\Delta W_u$ gekennzeichnet (vgl. Abb. 2).

Wenn das Belastungsverhältnis einmal festgelegt wird, reduziert sich das Problem, die optimale Tandem-Gitteranordnung zu bestimmen, im wesentlichen darauf, zwei optimale einreihige Gitteranordnungen zu bestimmen, wobei die Umlenkung $\Delta\beta_I = \beta_1 - \beta_2$ in Gitter I, die Umlenkung $\Delta\beta_{II} = \beta_2 - \beta_3$ in Gitter II einzeln verwirklicht werden soll.

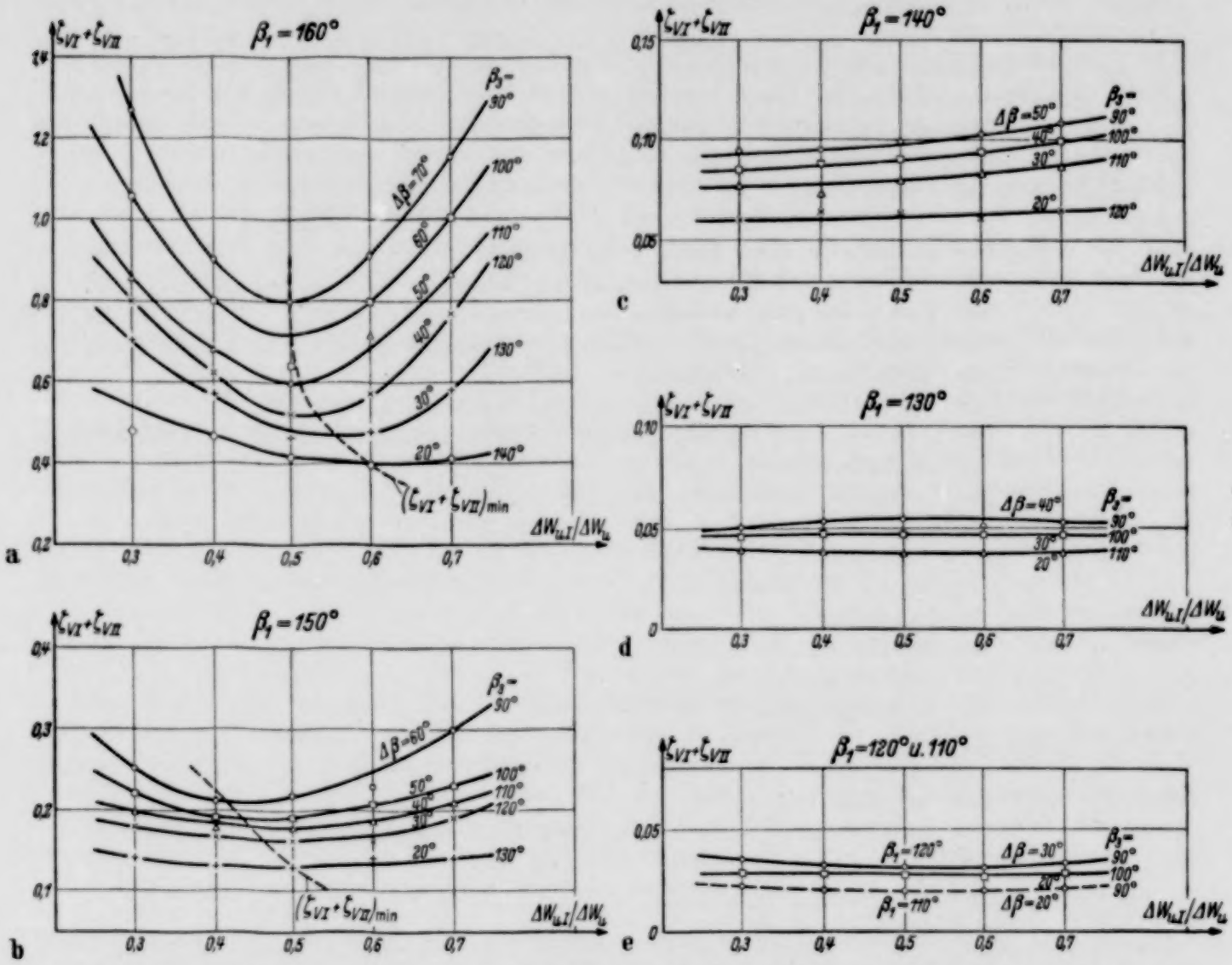


Abb. 2. Änderung der Gesamtverlustbeiwerte des Tandem-Pumpengitters mit dem Belastungsverhältnis bei festen Zu- und Abströmwinkeln (ohne Berücksichtigung der gegenseitigen Interferenz). Benutzte Profile: NACA 0010, 4410 und 8410.
——— Gesamtverlustbeiwerte $\zeta_{V,I} + \zeta_{V,II}$;
– – – – – – – – – Optimales Belastungsverhältnis beim Minimalverlust.

Das Problem, für ein gegebenes Geschwindigkeitsdreieck eine optimale einreihige Gitteranordnung zu ermitteln, ist bereits verschiedentlich behandelt worden[1, 2, 3]. Um das optimale Belastungsverhältnis $(\Delta W_{u\,I}/\Delta W_u)^*$ zu bestimmen, bei dem das Tandem-Pumpengitter das gegebene Geschwindigkeitsdreieck mit dem geringsten Verlust verwirklichen kann, wurden hierbei zunächst zwei für sich allein optimale einreihige Gitteranordnungen bei verschiedenem Belastungsverhältnis bei festem Zu- und Abströmwinkel ermittelt. Die zu den optimalen Gitteranordnungen gehörenden Gesamtverlustbeiwerte $\zeta_{V,I} + \zeta_{V,II}$ wurden dann in Abb. 2a bis 2e über dem Belastungsverhältnis $\Delta W_{u\,I}/\Delta W_u$ aufgetragen. Hierbei liegen die Ergebnisse der ebenen Schaufelgitter von Profilen NACA 0010, 4410 und 8410 zugrunde, die im Institut für Strömungsmechanik der Technischen Hochschule Braunschweig in systematischer Weise rechnerisch gewonnen wurden[4].

[1] *L. J. Herrig, J. C. Emery* and *J. R. Erwin*, Systematic two-dimensional cascade tests of NACA 65-Series compressor blades at low speeds. NACA TN 3916 (1957).
[2] *A. R. Howell*, The present basis of axial flow compressor design, ARC R & M 2095 (1942).
[3] *B. Eckert*, Axialkompressoren und Radialkompressoren. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.
[4] Siehe Fußnote 1 von Seite 202.

Bei größeren Zuströmwinkeln, z. B. bei $\beta_1 = 160°$ in Abb. 2a, ändert sich der Gesamtverlustbeiwert stark mit dem Belastungsverhältnis, und das optimale Belastungsverhältnis (Minimalverlust) ist dabei deutlich erkennbar, während bei kleineren Zuströmwinkeln, $\beta_1 < 140°$, sich der Gesamtverlustbeiwert praktisch kaum mit dem Belastungsverhältnis ändert. Deshalb hat die richtige Wahl des Belastungsverhältnisses nur bei größeren Zuströmwinkeln $\beta_1 > 140°$ Bedeutung. Die weiteren Ergebnisse sind in Abb. 3 bis 8 in einer Form wiedergegeben, wie man sie unmittelbar für die Auswahl der optimalen Tandem-Gitteranordnungen verwenden kann. Abb. 3 dient der Auswahl für das optimale Belastungsverhältnis und für die Schaufelprofile der beiden Gitter beim

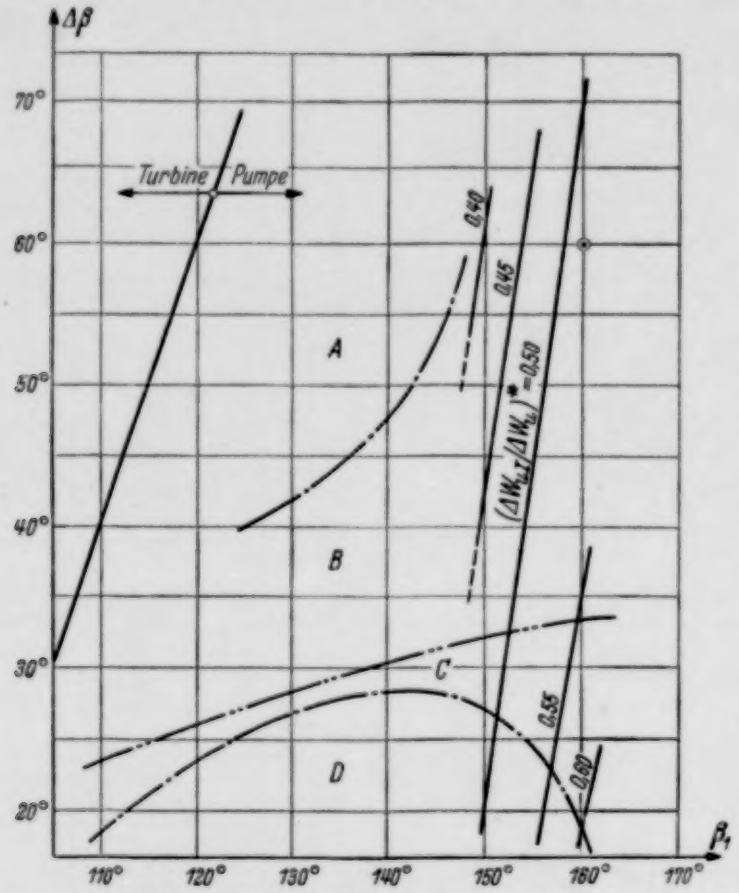


Abb. 3. Auswahldiagramm für die Schaufelprofile des Gitters I und II und für das optimale Belastungsverhältnis.
———— Optimales Belastungsverhältnis $(\Delta W_{u\,I}/\Delta W_u)^*$;
——·—— Abgrenzung der Schaufelprofile.

Bereich	A	B	C	D
Profil des Gitters I	NACA 8410	NACA 4410	NACA 4410	NACA 0010
Profil des Gitters II	NACA 8410	NACA 8410	NACA 4410	NACA 4410

⊙ — Anwendungsbeispiel nach Abb. 9.

Minimalverlust für ein beliebig gegebenes Geschwindigkeitsdreieck, wobei sich das optimale Belastungsverhältnis von den Linien konstanter Belastungsverhältnisse ablesen läßt. Linien konstanter optimaler Belastungsverhältnisse sind nur in dem Bereich mit größerem Zuströmwinkel eingetragen. In dem übrigen Bereich spielt das Belastungsverhältnis für den Gesamtverlustbeiwert fast keine Rolle. Für eine günstige Aufteilung der gesamten Umlenkung scheint in diesem Bereich das Belastungsverhältnis von $(\Delta W_{u\,I}/\Delta W_u)^* = 0{,}5$ am besten zu sein.

In Abb. 4 bzw. Abb. 5 sind die zu den optimalen Anordnungen gehörenden Teilungsverhältnisse des ersten bzw. des zweiten Gitters für ein beliebig gegebenes Geschwindigkeitsdreieck angegeben. Abb. 6 bzw. Abb. 7 dient ferner der Bestimmung der Schaufelwinkel des ersten bzw. des zweiten Gitters für die optimalen Tandem-Gitteranordnungen. Der Schaufelwinkel wird hierbei mittelbar aus den Winkelübertreibungen der beiden Gitter $\Delta\beta_{S\,I}$ und $\Delta\beta_{S\,II}$, die von den beiden Diagrammen direkt abzulesen sind, bestimmt mit Hilfe der Beziehungen

$$\beta^*_{S\,I} = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_3) + \Delta\beta_{S\,I} \qquad \text{für Gitter I}$$

und

$$\beta^*_{S\,II} = \beta_3 + \Delta\beta_{S\,II} \qquad \text{für Gitter II.}$$

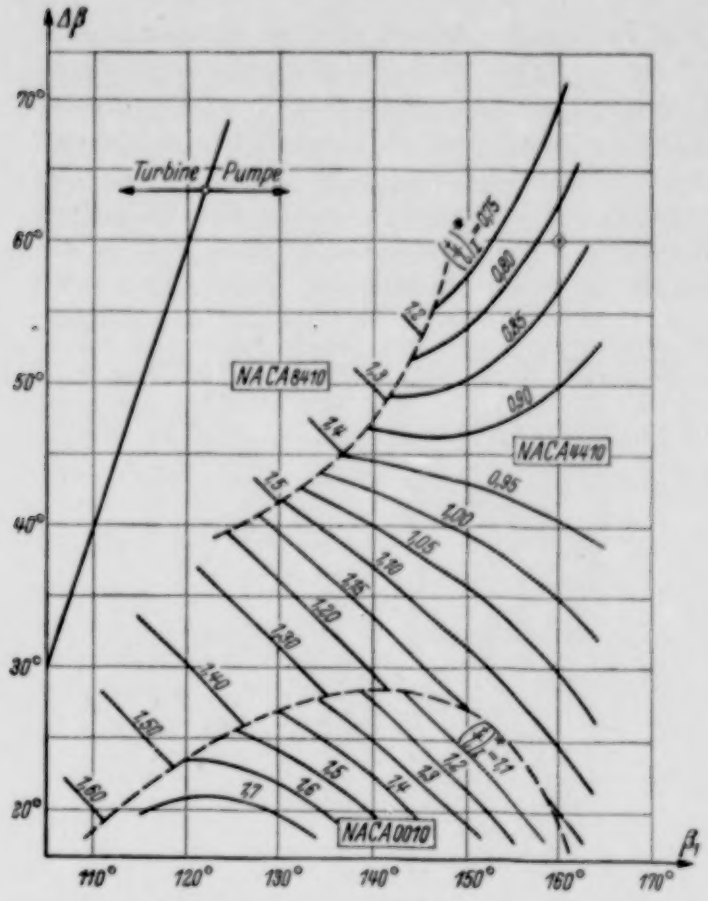


Abb. 4. Auswahldiagramm für das Teilungsverhältnis des Gitters I, $(t/l)^*_{\mathrm{I}}$, bei der optimalen Tandem-Gitteranordnung.

——— Teilungsverhältnis des Gitters I;
- - - - - - Abgrenzung des Schaufelprofiles.

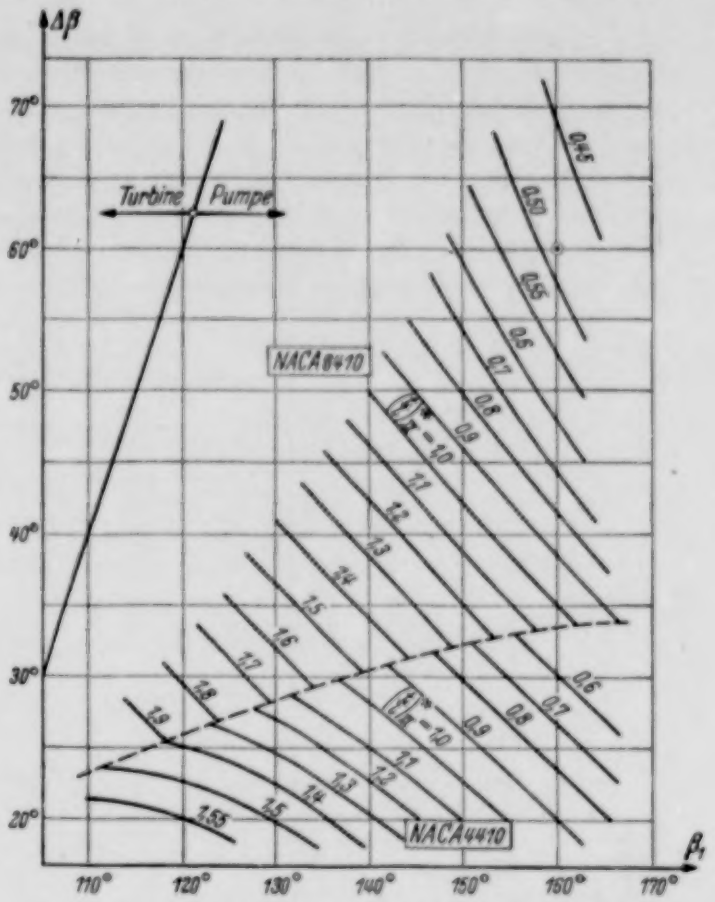


Abb. 5. Auswahldiagramm für das Teilungsverhältnis des Gitters II, $(t/l)^*_{\mathrm{II}}$, bei der optimalen Tandem-Gitteranordnung.

——— Teilungsverhältnis des Gitters II;
- - - - - - Abgrenzung des Schaufelprofiles.

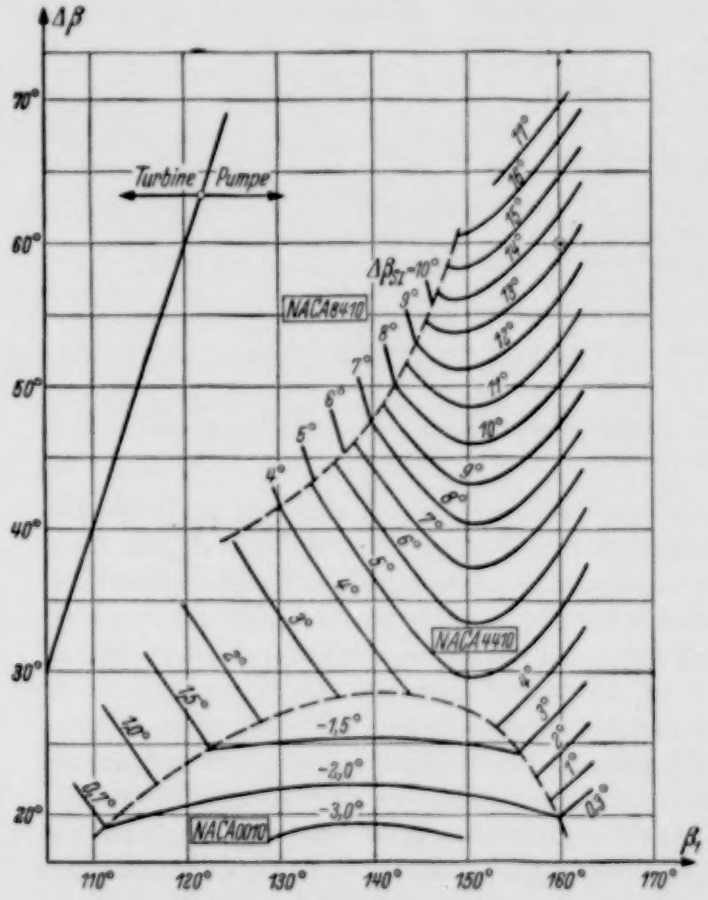


Abb. 6. Auswahldiagramm für den Schaufelwinkel des Gitters I, $\beta^*_{S\mathrm{I}}$, bei der optimalen Tandem-Gitteranordnung.

$$\beta^*_{S\mathrm{I}} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} + \Delta\beta_{S\mathrm{I}} = \beta_1 - \frac{\Delta\beta}{2} + \Delta\beta_{S\mathrm{I}}.$$

——— Winkelübertreibung $\Delta\beta_{S\mathrm{I}}$;
- - - - - - Abgrenzung des Schaufelprofiles.

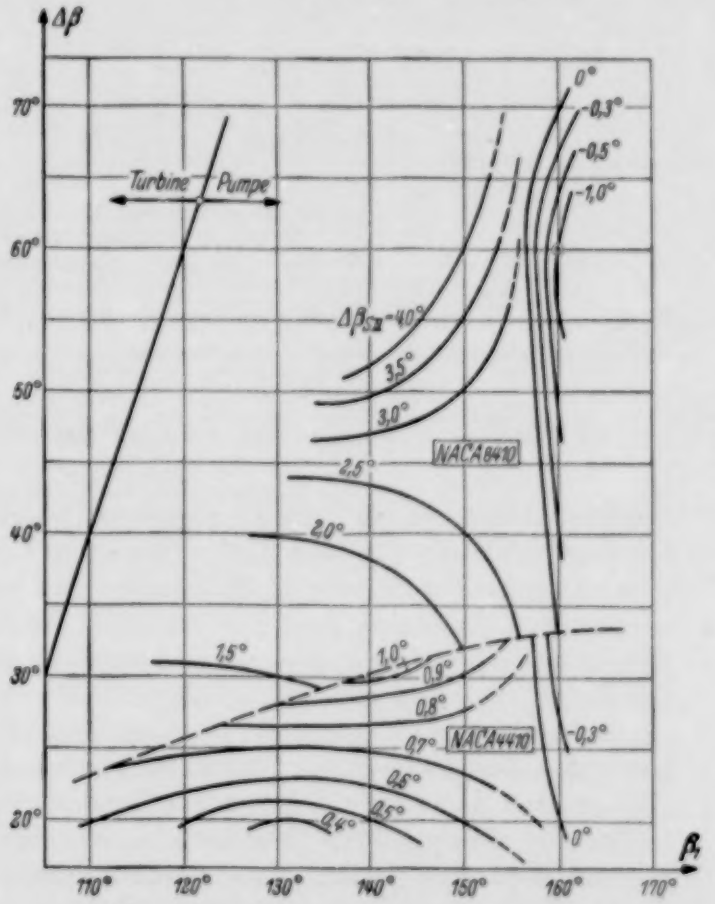


Abb. 7. Auswahldiagramm für den Schaufelwinkel des Gitters II, $\beta^*_{S\mathrm{II}}$, bei der optimalen Tandem-Gitteranordnung.

$$\beta^*_{S\mathrm{II}} = \beta_2 + \Delta\beta_{S\mathrm{II}}$$

——— Winkelübertreibung $\Delta\beta_{S\mathrm{II}}$;
- - - - - - Abgrenzung des Schaufelprofiles.

Abb. 8 zeigt Linien konstanter Gesamtverlustbeiwerte des Tandem-Pumpengitters beim Minimalverlust, wobei als *Reynolds*zahl $Re = W_3 l/\nu = 5 \cdot 10^5$ angenommen wurde. In Bereichen, in denen die Schaufelbelastung nicht allzu groß ist, kann man statt des Tandem-Pumpengitters auch ein gewöhnliches einreihiges Gitter benutzen. Die strichpunktierten Linien in Abb. 8 zeigen zusätzlich auch die Verlustbeiwerte des einreihigen Gitters beim Minimalverlust. Aus dem Vergleich der beiden Kurvenscharen läßt sich weiter eine gestrichelte Abgrenzungslinie eintragen. Oberhalb dieser Linie hat ein Tandem-Pumpengitter einen geringeren Verlustbeiwert als ein entsprechendes einreihiges Gitter, während unterhalb dieser Linie ein einreihiges Gitter günstiger ist. Aus dem Verlauf der Abgrenzungslinie erkennt man, daß der Bereich, in dem das Tandem-Pumpengitter hinsichtlich der Verluste günstiger ist als das einreihige Gitter, wider Erwarten groß ist und auch Fälle geringer Umlenkung

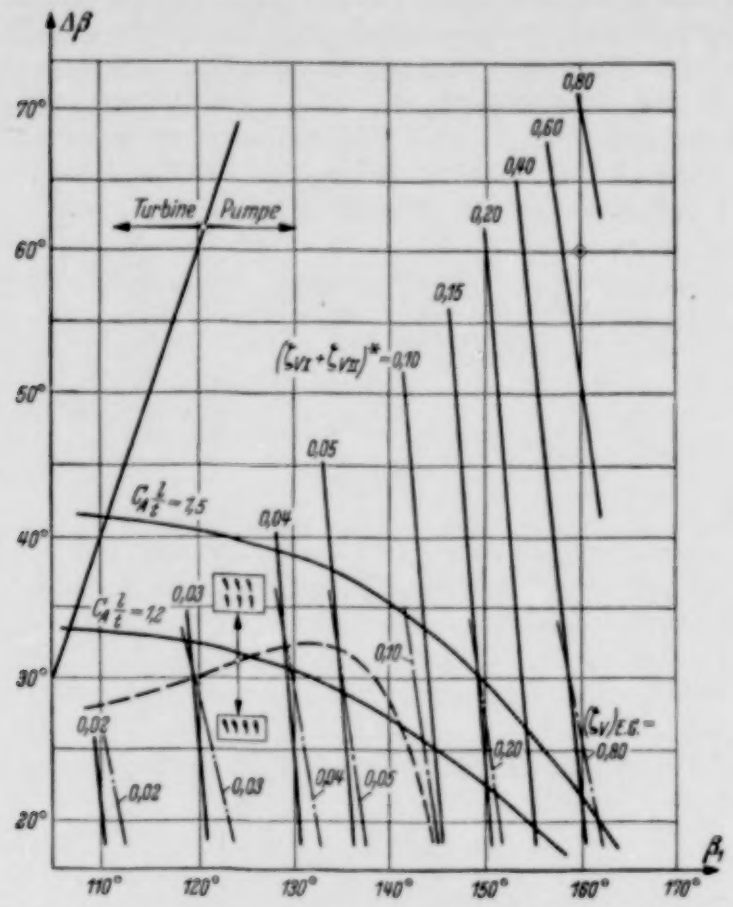


Abb. 8. Verlustbeiwerte des Tandem-Pumpengitters beim Minimalverlust und Vergleich mit einreihigem Gitter.

——— Verlustbeiwerte als Tanden-Pumpengitter $(\zeta_{V,\mathrm{I}} + \zeta_{V,\mathrm{II}})^*$;

—·— Verlustbeiwerte als einreihiges Gitter $(\zeta_V)_{E.G.}$;

– – – – – Abgrenzung der günstigeren Gitteranordnung, oberhalb der Kurve Tandem-Pumpengitter, unterhalb der Kurve einreihiges Pumpengitter günstiger.

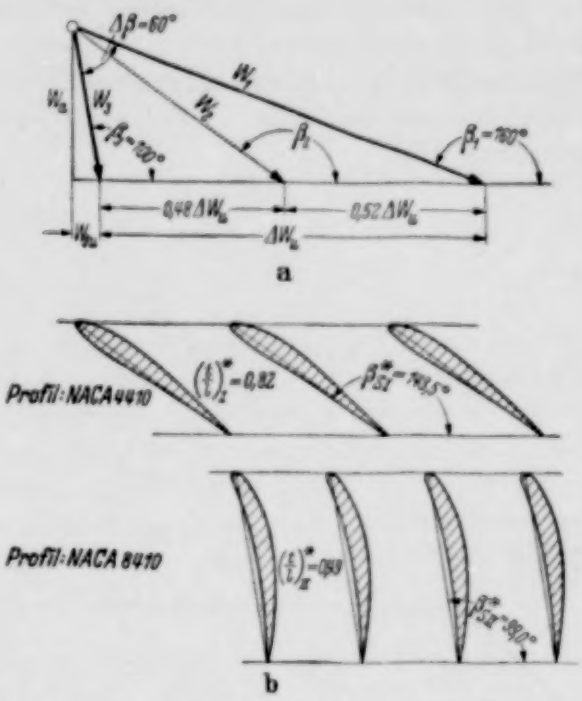


Abb. 9. Anwendungsbeispiel für eine optimale Tandem-Gitteranordnung ohne Berücksichtigung der gegenseitigen Interferenz. — a) Gegebenes Geschwindigkeitsdreieck: $\beta_1 = 160°$ und $\beta_3 = 100°$, b) Gesuchte Gitteranordnung mit Hilfe von Abb. 3 bis 8, zugehöriger Gesamtverlustbeiwert

$(\zeta_{V,\mathrm{I}} + \zeta_{V,\mathrm{II}})^* = 0{,}70.$

mit einschließt, so daß das Tandem-Pumpengitter in Wirklichkeit einen sehr großen Anwendungsbereich besitzt. In Abb. 8 sind noch zwei weitere Begrenzungslinien eingetragen, die den Formeln

$$c_A \frac{l}{t} = \frac{2\,\Delta W_u}{W_\infty} = 1{,}2 \text{ bzw. } 1{,}5 \tag{3.1}$$

entsprechen, wobei c_A den auf die Grundgeschwindigkeit W_∞ bezogenen Auftriebsbeiwert der Gitterschaufel bedeutet. Herkömmlicherweise wird die obere Begrenzungslinie $c_A\, l/t = 1{,}5$ als die Belastungsgrenze eines einreihigen Gitters angesehen[1, 2]. Wie man sieht, umschließt diese Linie auch noch einen breiten Bereich, bei dem das Tandem-Pumpengitter schon günstigere Werte liefert. Nach den hier gewonnenen Ergebnissen würde sich die Kurve $c_A\, l/t = 1{,}2$ als Belastungsgrenze besser eignen. Oberhalb dieser Grenze ist es jedenfalls empfehlenswert, das Tandem-Pumpengitter zu verwenden, um damit die Möglichkeit der Verbesserung des Wirkungsgrades auszunutzen.

Abb. 9 stellt ein Anwendungsbeispiel für eine große Umlenkung von $\Delta\beta = 60°$ mit Hilfe der hier angegebenen Auswahldiagramme dar.

[1] *B. Eckert*, Axialkompressoren und Radialkompressoren. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.
[2] Siehe Fußnoten 1 und 2 von Seite 204.

Solche Untersuchungen über Tandem-Pumpengitter starker Umlenkung kann man auch mit den Gitterergebnissen anderer Profilserien durchführen. Es ist zu vermuten, daß die vorliegenden Ergebnisse weitgehend unabhängig von der untersuchten Profilserie sind und ziemlich allgemeine Eigenschaften des Tandem-Pumpengitters wiedergeben.

4. Experimentelle Untersuchungen über den Interferenzeinfluß des Tandem-Pumpengitters bei verschiedenen relativen Stellungen der beiden Gitter. Um die Änderung der Gittereigenschaften des Tandem-Pumpengitters, nämlich die Änderung der Umlenkung, der Verluste und der Druckverteilung, bei festen Anordnungen der beiden Gitter experimentell klarzustellen, wurden Windkanalmessungen im kleinen Gitterwindkanal des Institutes durchgeführt. Abb. 10 stellt die Meßstrecke des Kanales dar. Die beiden Gitter bestehen aus je 11 Schaufeln von Profilen NACA 8410 (8% Wölbung bei 40% Wölbungsrücklage und 10% Maximaldicke). Die Schaufeln haben eine Profiltiefe von $l = 60$ mm und eine Schaufelhöhe von 300 mm. Sie wurden aus Stahl hergestellt und besitzen bei der verwendeten Anblasegeschwindigkeit hydraulisch glatte Oberfläche. Ferner sind zwei der Schaufeln in ihrem Mittelschnitt mit insgesamt 26 Druckmeßstellen versehen, von denen je 13 auf einer Schaufelseite angeordnet sind.

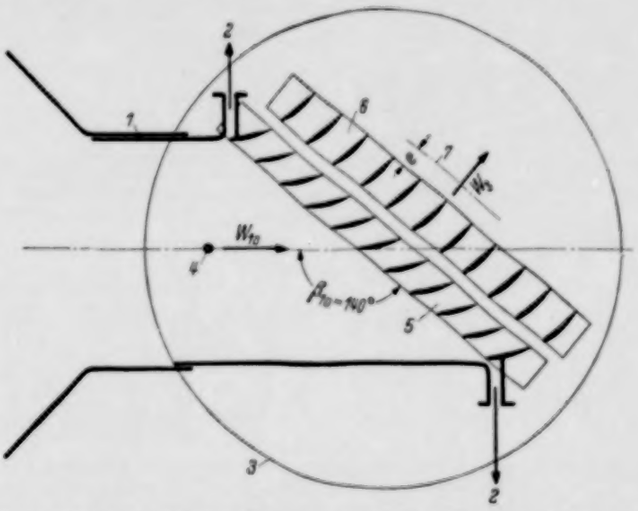


Abb. 10. Einbau des Tandem-Pumpengitters im Versuchsstand. *1* Verstellbarer Boden des Zuströmkanales; *2* Absaugung zum Gebläse; *3* Drehscheibe; *4* Wandbohrung zur Messung des statischen Drucks p_1; *5* Erster Schaufelträger für Gitter I aus 11 NACA 8410 Schaufeln; *6* Zweiter Schaufelträger für Gitter II aus 11 NACA 8410 Schaufeln, parallel und senkrecht zur Gitterfront verstellbar; *7* Meßebene für die Nachlaufmessungen, Meßabstand $e = 30$ mm (0,5 l).

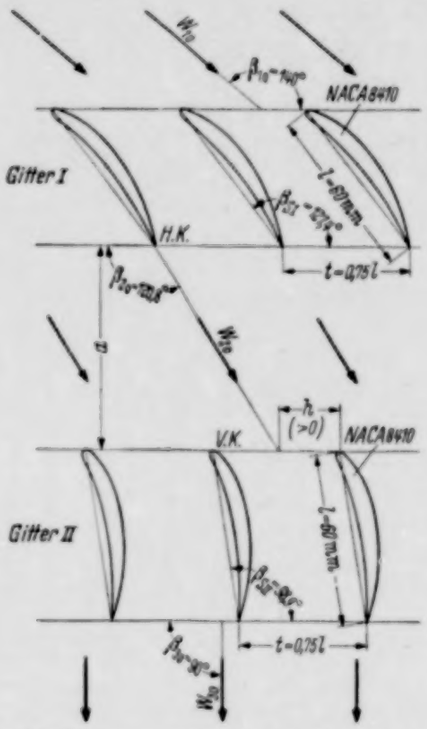


Abb. 11. Gemessene Gitteranordnung des Tandem-Pumpengitters. Bei unendlich großem Abstand $a/l = \infty$ ermöglicht die Anordnung einen Abströmwinkel $\beta_{30} = 90°$ beim Zuströmwinkel $\beta_{10} = 140°$ mit einem Belastungsverhältnis $(\Delta W_{u\,1}/\Delta W_u) = 0{,}5$. (Fußzeiger 0 entspricht dem Fall ohne Interferenz.) Bei den Messungen sind nur der Abstand a und die Versetzung h variiert worden.

Die Gitteranordnungen beider Gitter sind hierbei so bestimmt, daß die beiden Gitter bei unendlich großem Abstand, nämlich ohne Interferenz, ein gegebenes Geschwindigkeitsdreieck von $\beta_{10} = 140°$ und $\beta_{30} = 90°$ verwirklichen (vgl. Abb. 11). Für die Aufteilung der gesamten Umlenkung wird als optimales Belastungsverhältnis $(\Delta W_{u\,1}/\Delta W_u)^* = 0{,}5$ auf Grund der Ergebnisse in Abb. 3 ausgewählt. Infolgedessen soll das erste Gitter die Umlenkung $\Delta\beta_{I\,0} = 19{,}2°$ bei Zuströmwinkel $\beta_{10} = 140°$, das zweite Gitter die Umlenkung $\Delta\beta_{II\,0} = 30{,}8°$ bei Zuströmwinkel $\beta_{20} = 120{,}8°$ als Einzelgitter ermöglichen. In Hinblick auf die praktischen Anwendungen wurde für beide Gitter die gleiche Teilung, und zwar $t/l = 0{,}75$ gewählt. Von den Voruntersuchungen sind die zum Verwirklichen der gegebenen Umlenkung als Einzelgitter erforderlichen Schaufelwinkel und die zugehörigen Verlustbeiwerte ohne Interferenz bestimmt worden. Die gemessene Tandem-Gitteranordnung ist in Abb. 11 dargestellt.

Zur Festlegung der gegenseitigen Stellung der beiden Gitter dienen hierbei zwei Parameter, und zwar der Abstand a und die Versetzung h. Der Abstand ist die Spaltweite zwischen den beiden Gittern und wurde bei den Messungen auf $a/l = 0{,}15$; 0,30; 0,50 und 0,80 eingestellt. Die Versetzung h wird hierbei nach der geometrischen Lage zwischen der Delle der ersten Schaufel und der Vorderkante der zweiten Schaufel festgelegt. Wenn die Delle von der Hinterkante der Schaufel I, deren Bahnlinie näherungsweise als eine gerade Linie mit Abströmwinkel 120,8°

($= \beta_{20}$) angenommen sei, direkt die Vorderkante der Schaufel II trifft, beträgt die Versetzung unabhängig vom Abstand immer $h = 0$. Die weitere Versetzung wird nach der Verschiebung der Schaufel II in Richtung der Saugseite gegenüber der Versetzung $h = 0$ angegeben und hat dabei positives Vorzeichen. Die Messungen sind bei Versetzungen von $h/t = 0$; 0,2; 0,4; 0,6 und 0,8 durchgeführt worden. Im übrigen stimmt die Versetzung $h/t = 1{,}0$ wieder mit der Versetzung $h/t = 0$ überein.

Die Schaufeln der beiden Gitter befinden sich jeweils in einem Schaufelträger. Der erste Schaufelträger ist mit der Drehscheibe des Kanales fest verbunden, während der zweite Schaufelträger, im Abstand und in der Versetzung verstellbar, auf dem ersten Schaufelträger aufgeschraubt wird. Vor dem Eintritt ins Tandem-Pumpengitter wird am oberen und unteren Kanalende die Wandgrenzschicht der Zuströmung durch Schlitze abgesaugt. Es wurden Nachlaufmessungen in einer Entfernung von 50% der Schaufeltiefe im Mittelschnitt hinter dem Gitter II und Druckverteilungsmessungen längs der Schaufelkontur der beiden Gitter durchgeführt. Die Nachlaufmessungen dienen der Bestimmung des Abströmwinkels β_3 und der Verlustbeiwerte der beiden Gitter $\zeta_{V,I}$ und $\zeta_{V,II}$, die sich hierbei nach den Formeln ermitteln lassen:

$$\zeta_{V,I} = \frac{\Delta g_I}{\frac{\varrho}{2} W_a^2} = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{g_1 - g_2(y)}{\frac{\varrho}{2} W_a^2} dy , \tag{4.1}$$

$$\zeta_{V,II} = \frac{\Delta g_{II}}{\frac{\varrho}{2} W_a^2} = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{g_2(y) - g_3(y)}{\frac{\varrho}{2} W_a^2} dy . \tag{4.2}$$

Bei Versetzung $h/t = 0{,}4$ und 0,6 kann man bei der Nachlaufmessung hinter dem Gitter II deutlich zwei getrennte Dellen von den beiden Gittern beobachten. In diesem Fall kann man ohne weiteres die Verlustbeiwerte der beiden Gitter getrennt ermitteln. Bei Versetzung $h/t = 0{,}2$ und 0,8 überlagern sich die beiden Dellen an ihren Rändern. Aber es ist dabei auch möglich, diese Dellen mit ausreichender Genauigkeit voneinander zu trennen und die Verlustbeiwerte der beiden Gitter einzeln zu ermitteln, da die Form der Dellen an ihrem Rand aus den anderen Messungen genügend genau geschätzt werden kann, und der zusammenfallende Verlust von den beiden Gittern,

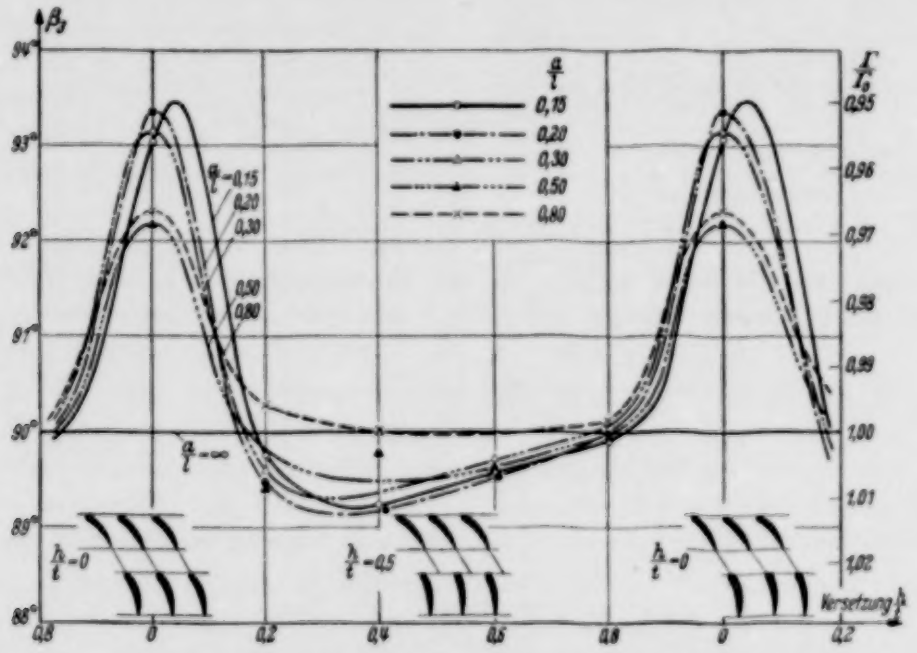


Abb. 12. Änderung des Abströmwinkels β_3 und des Gesamtzirkulationsverhältnisses Γ/Γ_0 mit der Versetzung bei verschiedenen Abständen.

$\Delta g_I + \Delta g_{II}$, in die einzelnen Anteile aufgespalten werden kann. Dagegen kommen die beiden Dellen bei Versetzung $h/t = 0$ vollkommen zusammen und man kann daraus nur den Gesamtverlust erhalten. Nach den Meßergebnissen ändert sich der Verlust des Gitters I beinahe sinusförmig mit der Versetzung. Deshalb ist es nicht schwierig, von den bereits ermittelten Ergebnissen bei Versetzung $h/t = 0{,}2$; 0,4; 0,6 und 0,8 den Verlust des Gitters I bei Versetzung $h/t = 0$ zu

interpolieren. Der Verlust des Gitters II bei Versetzung $h/t = 0$ ist hierbei als der Restteil des Gesamtverlustes zu verstehen.

Bei allen Messungen des Tandem-Pumpengitters betrug der Staudruck vor dem Gitter I 200 mm WS, entsprechend einer Austrittsgeschwindigkeit des Gitters I von $W_2 = 43$ m/s und

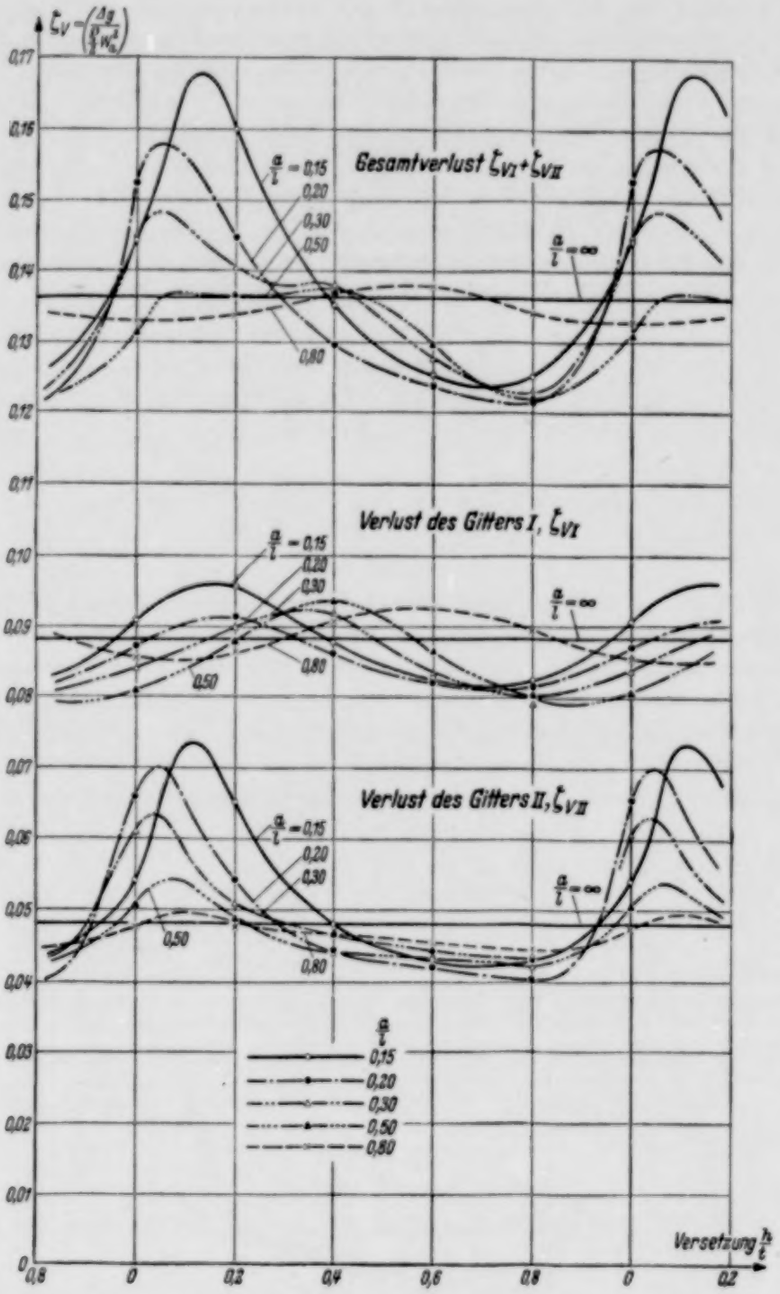


Abb. 13. Verlustbeiwerte des Tandem-Pumpengitters bei verschiedenen Abständen in Abhängigkeit von der Versetzung.
$Re_I = W_2 \cdot l/\nu = 1{,}7 \cdot 10^5$;
$Re_{II} = W_3 \cdot l/\nu = 1{,}5 \cdot 10^5$.

des Gitters II von $W_3 = 37$ m/s. Die auf die Austrittsgeschwindigkeit bezogene *Reynolds*-Zahl beträgt daher

$$Re_I = \frac{W_2 l}{\nu} = 1{,}7 \cdot 10^5 \qquad \text{für Gitter I},$$

$$Re_{II} = \frac{W_3 l}{\nu} = 1{,}5 \cdot 10^5 \qquad \text{für Gitter II}.$$

Auf Grund der Nachlaufmessungen hinter dem Gitter II zeigt Abb. 12 die Änderung des Abströmwinkels β_3 mit der Versetzung bei verschiedenen Abständen. Die rechte Nebenskala dient der Bestimmung der entsprechenden Änderung der Gesamtzirkulation nach der Formel

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{\Delta W_u}{\Delta W_{u0}} = \frac{\operatorname{ctg}\beta_{10} - \operatorname{ctg}\beta_3}{\operatorname{ctg}\beta_{10} - \operatorname{ctg}\beta_{30}} \quad (4.3)$$

Die Abweichung des Abströmwinkels von $\beta_3 = 90°$ ist reiner Interferenzeinfluß zwischen den beiden Gittern. Diese Ergebnisse zeigen, daß der Abströmwinkel im wesentlichen unabhängig vom Abstand, dagegen sehr stark abhängig von der Versetzung ist. Bei Versetzung $h/t = 0$, bei der also die Delle der Schaufel I direkt die Vorderkante der Schaufel II trifft, vermindert sich die Umlenkung oder die Zirkulation erheblich. Diese Erscheinung kann darauf zurückgeführt werden, daß die Grenzschicht auf der Schaufelkontur des Gitters II wegen des Delleneinflusses eher zur Ablösung neigt und dadurch zu einer Abnahme der Zirkulation führt. Bei Versetzung $h/t = 0{,}2$ und 0,4 bei denen also eine Delle der Schaufel I sich direkt an der Druckseite der Schaufel II befindet, nimmt die Gesamtzirkulation im allgemeinen um etwa 1% zu. Bei Versetzung $h/t = 0{,}8$ verschwindet der Interferenzeinfluß vollkommen, und die Abströmungsrichtung bzw. die Gesamtzirkulation stimmt mit dem Fall ohne Interferenz genau überein. Die Schwankung des Abströmwinkels klingt mit zunehmendem Abstand allmählich ab, aber selbst bei dem verhältnismäßig großen Abstand $a/l = 0{,}8$ ist die Schwankung noch ziemlich groß.

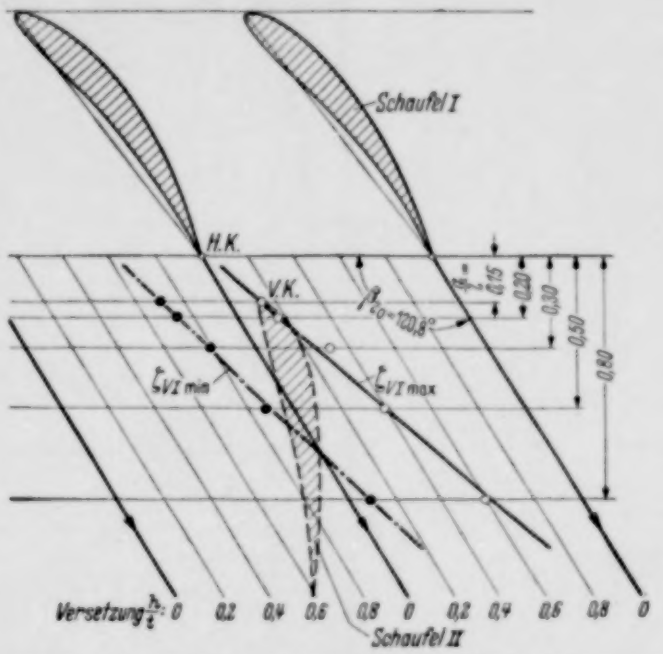


Abb. 14. Gegenseitige Lage beim Interferenzeinfluß des Gitters II auf Gitter I.
——○—— Ort der Vorderkante der Schaufel II, bei dem das Gitter I bei gegebenem Abstand einen Maximalverlust erreicht;
—·—●—·— Ort der Vorderkante der Schaufel II, bei dem das Gitter I bei gegebenem Abstand einen Minimalverlust erreicht.

In Abb. 13 ist die Änderung der Verluste des Tandem-Pumpengitters dargestellt. Verlustbeiwerte des Gitters I, des Gitters II und der beiden Gittern zusammen sind bei verschiedenen Abständen über der Versetzung aufgetragen, wobei zum Vergleich auch die Verlustbeiwerte ohne Interferenz angegeben sind, die von der Versetzung nicht abhängen. Die Verlustbeiwerte des ersten und zweiten Gitters sind in ihrem Verlauf deutlich voneinander verschieden, woraus sich wesentliche Erkenntnisse über die Entstehung des Interferenzeinflusses ergeben. Die Verlustbeiwerte des Gitters I ändern sich sinusförmig um einen Mittelwert, der mit dem Verlustbeiwert ohne Interferenz gut übereinstimmt, und die Phase der Verlustkurve verschiebt sich mit zunehmendem Abstand allmählich in Richtung der Saugseite.

Abb. 14 stellt die Orte der Vorderkante der Schaufel II dar, bei denen Gitter I bei gegebenem Abstand durch den Interferenzeinfluß vom Gitter II den Minimal- bzw. Maximalverlust erreicht. Die Orte liegen praktisch auf einer Geraden, infolgedessen ändert sich die Phase linear mit dem Abstand. Bei sehr kleinem Abstand ist der Verlust des Gitters I bei Versetzung $h/t = 0$ maximal und bei Versetzung $h/t = 0{,}5$ minimal.

Aus der regelmäßigen sinusförmigen Änderung der Verluste des Gitters I und auch aus den gemessenen Druckverteilungen an Gitter I in Abb. 15 beim Abstand $a/l = 0{,}15$ kann man den Interferenzeinfluß des Gitters II auf das Gitter I erkennen: Gitter II beeinflußt zunächst die Druckverteilung des Gitters I je nach der gegenseitigen Stellung beider Gitter, und diese Änderung der Druckverteilung verursacht dann die Schwankung der Verluste des Gitters I. Zum Beispiel hat die Druckverteilung des Gitters I bei Versetzung $h/t = 0{,}2$ wegen des verschlechternden Interferenzeinflusses des Gitters II in der Nähe der Hinterkante starken Druckanstieg, was einen Zuwachs der Verluste zur Folge hat. Demgegenüber verläuft die Druckverteilung bei Versetzung $h/t = 0{,}6$ und 0,8 ähnlich derjenigen ohne Interferenz, und infolgedessen besitzt Gitter I dafür kleinere Verluste. Wie schon oben erwähnt, kann also die Strömung in Gitter I potentialtheoretisch erklärt werden.

Bei Gitter II ändern sich die Verluste mit der Versetzung derart, daß die Verluste bei jedem Abstand zwischen Versetzung $h/t = 0$ und 0,2 erheblich (um 50% bei $a/l = 0{,}15$) zunehmen, während sie bei den übrigen Versetzungen etwa konstant bleiben. Aus dem Ergebnis, daß die Verluste immer zwischen Versetzung $h/t = 0$ und 0,2 zunehmen, d. h. die Phase der Schwankung sich nicht mit dem Abstand ändert, ist die Folgerung zu ziehen, daß die Verlustdellen von den ersten

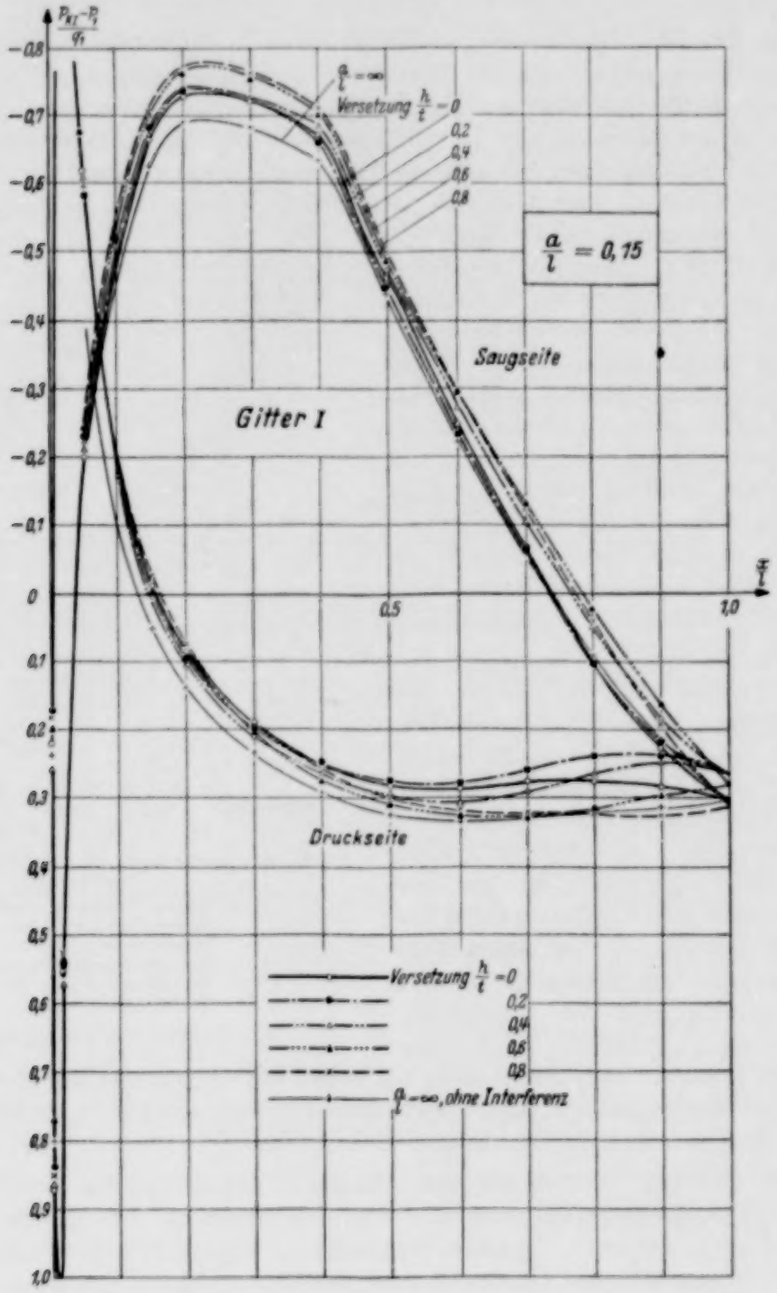


Abb. 15. Druckverteilungen des Gitters I beim Abstand $a/l = 0{,}15$ und verschiedenen Versetzungen h/t.

Schaufeln für die Verluste des Gitters II eine entscheidende Rolle spielen. Der Verlauf der Verluste des Gitters II läßt sich nicht durch eine potentialtheoretische Betrachtung erfassen, bei der also die Änderung der Verluste nur durch die Änderung der Druckverteilung hervorgerufen wird, sondern nur durch eine grenzschichttheoretische Betrachtung, welche aufzeigt, wie eine Delle die Grenzschichtbildung der nachstehenden Schaufel und damit die Lage der Ablösungspunkte beeinflußt.

Die Strömung in einer Delle enthält eine kleinere kinetische Energie als die Strömung außerhalb der Delle. Deshalb wird beim Überwinden des von der Außenströmung aufgeprägten Druckanstieges die Strömung in der Delle eher als die gesunde Strömung ihre kinetische Energie er-

schöpfen und infolgedessen eher ablösen, so daß sich daraus ein gewisser Zuwachs der Verluste ergibt. Dieser ausgeprägte Interferenzeinfluß einer Delle in der Zuströmung wird in Ziff. 6 noch ausführlicher behandelt.

Demgegenüber erreicht Gitter II noch kleinere Verluste als ohne Interferenz bei Versetzung $h/t = 0{,}4$; 0,6 und 0,8, bei denen die Schaufel II sich in gesunder ungestörter Strömung befindet. In Abb. 16 sind die Druckverteilungen des Gitters II bei Abstand $a/l = 0{,}15$ bei verschiedenen Versetzungen dargestellt. Außer bei Versetzung $h/t = 0$ weichen die Druckverteilungen kaum

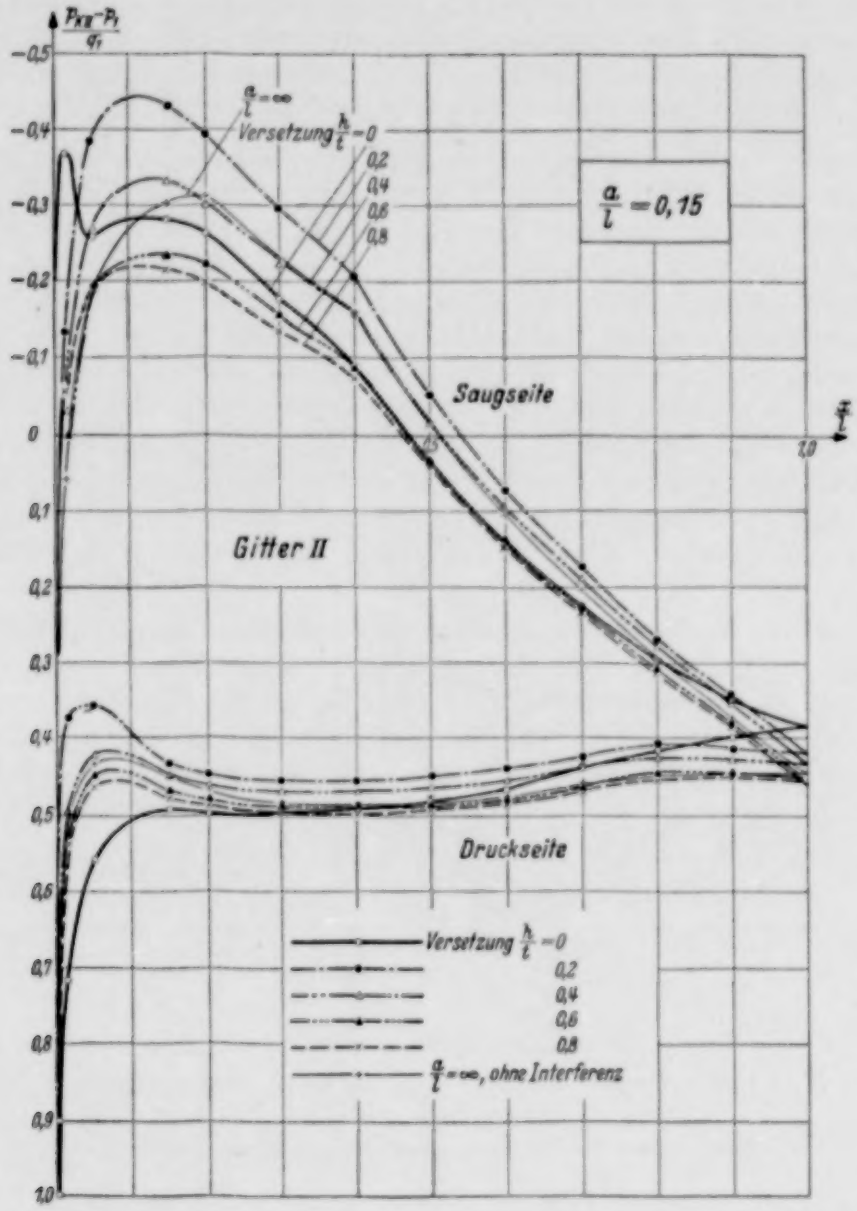
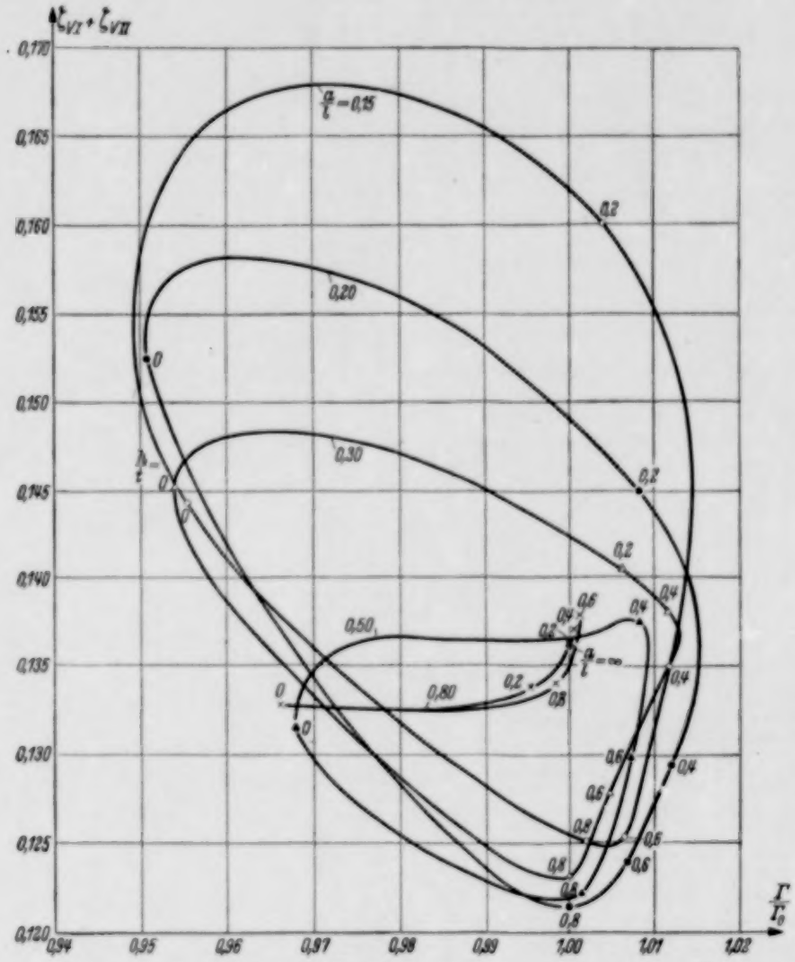


Abb. 16. Druckverteilungen des Gitters II beim Abstand $a/l = 0{,}15$ und verschiedenen Versetzungen h/t.

voneinander ab. Aus der Druckverteilung bei Versetzung $h/t = 0$ ist zu beobachten, daß der Druck auf der Saugseite in der Nähe der Hinterkante infolge der Ablösung der Grenzschicht nicht weiter ansteigt. Aus dieser Ablösung der Grenzschicht folgt unmittelbar der erhebliche Zuwachs der Verluste. Alle anderen Druckverteilungen bei Versetzung $h/t = 0{,}2$; 0,4; 0,6 und 0,8 sind der Druckverteilung ohne Interferenz ähnlich. Die Ergebnisse der Druckverteilungsmessungen an Gitter II liefern also qualitativ dieselbe Schlußfolgerung wie die Ergebnisse der Nachlaufmessungen.

In Abb. 17 ist der Gesamtverlustbeiwert $\zeta_{V,I} + \zeta_{V,II}$ über dem Zirkulationsverhältnis Γ/Γ_0 aufgetragen. Bei festem Abstand wird dabei durch Änderung der Versetzung eine geschlossene Kurve durchlaufen. Die Werte der Versetzung sind an die einzelnen Punkte angeschrieben. Mit zunehmendem Abstand schrumpft die geschlossene Kurve allmählich zusammen und ist schließlich bei unendlich großem Abstand nur noch ein Punkt von $\Gamma/\Gamma_0 = 1{,}0$ und $(\zeta_{V,I} + \zeta_{V,II})_0 = 0{,}136$. Das Diagramm stellt den Vorgang des gegenseitigen Interferenzeinflusses sehr übersichtlich dar.

Daraus ist für den Entwurf des Tandem-Pumpengitters die Folgerung zu ziehen, daß die Versetzung $h/t = 0{,}8$, bei der die beiden Schaufeln sich wie ein Spaltflügel mit einer Spaltweite von $^1/_5$ der Teilung anordnen, und die Schaufel II sich in der nicht abgelösten gesunden Strömung an der Druckseite der Schaufel I befindet, bei einem in der Praxis gewöhnlich vorkommenden Abstand von $a/l = 0{,}15$ bis 0,5 in folgender Hinsicht am günstigsten ist: erstens erreicht der Gesamtverlust dabei den Minimalwert, der etwa 10% kleiner ist als der Verlust ohne Interferenz, und zweitens stimmt die Gesamtzirkulation mit derjenigen ohne Interferenz gut überein, so daß keine



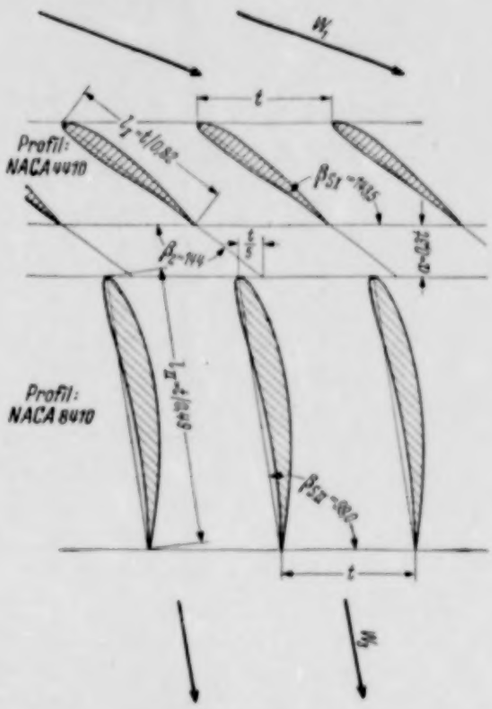


Abb. 18. Beispiel für optimale Tandem-Gitteranordnung unter Berücksichtigung der gegenseitigen Interferenz.

Gegeben: Zuströmwinkel $\beta_1 = 160°$ und Abströmwinkel $\beta_2 = 100°$. (Vgl. Abb. 9 zur Bestimmung der Anordnungen der beiden Gitter ohne Interferenz.)

Abb. 17. Gesamtverlustbeiwert des Tandem-Pumpengitters $\zeta_{V,I} + \zeta_{V,II}$ über dem Zirkulationsverhältnis Γ/Γ_0 für verschiedene Abstände und Versetzungen.

Die Zahlen an den Kurvenpunkten geben die entsprechende Versetzung an.

Korrektur für den Abströmwinkel nötig ist. Der Abstand ist hierbei fast gleichgültig und kann beliebig ausgewählt werden, solange er zwischen $a/l = 0{,}15$ und 0,5 liegt.

Nach den in Ziff. 3 gewonnenen Ergebnissen haben die optimalen Anordnungen der beiden Gitter ohne Berücksichtigung der gegenseitigen Interferenz nicht unbedingt die gleichen Teilungsverhältnisse. Wenn die Teilungen der beiden Gitter verschieden sind, ändert sich die relative Lage der beiden Schaufeln zueinander nicht periodisch mit der Teilung, und es kann sich der Interferenzeinfluß an einer Stelle, bei der die beiden Schaufeln sich wie ein Spaltflügel anordnen, günstig und an anderer Stelle, bei der sich die Schaufel II im Nachlauf der Schaufel I befindet, ungünstig auswirken. Um solches mit der Teilung nicht periodisches Strömungsfeld zu vermeiden und nur die günstige Wirkung des Interferenzeinflusses auszunutzen, sollten die Teilungen der beiden Gitter möglichst gleich sein.

In Abb. 18 ist ein optimales Tandem-Pumpengitter unter Berücksichtigung der gegenseitigen Interferenz für ein Geschwindigkeitsdreieck von $\beta_1 = 160°$ und $\Delta\beta = 60°$ dargestellt, wobei die Profilformen, Teilungsverhältnisse und Schaufelwinkel der beiden Gitter bereits nach dem Beispiel in Abb. 9 ohne Berücksichtigung der Interferenz bestimmt wurden.

5. Ein Berechnungsverfahren zum Entwurf eines optimalen Tandem-Pumpengitters für ein gegebenes Geschwindigkeitsdreieck. Neben den experimentellen Untersuchungen wurde das Entwurfsproblem eines optimalen Tandem-Pumpengitters für ein gegebenes Geschwindigkeitsdreieck auch auf theoretischem Wege unter Berücksichtigung der gegenseitigen Interferenz untersucht. Diese Untersuchungen haben ebenfalls das Ziel, die günstigste gegenseitige Stellung der beiden Gitter zu bekommen. Zunächst wurde hierbei ein potentialtheoretisches Rechenverfahren zum Entwurf eines Tandem-Pumpengitters unter Berücksichtigung der gegenseitigen Interferenz (erste Hauptaufgabe des Tandem-Schaufelgitters) entwickelt, und zwar als Erweiterung des Verfahrens, welches *N. Scholz*[1] für den Entwurf eines einreihigen Schaufelgitters mit Hilfe der Singularitätenmethode angegeben hat. Weiter wurde die Änderung der Verluste des berechneten Tandem-Pumpengitters mit der Versetzung auf Grund eines grenzschichttheoretischen Rechenverfahrens[2], ermittelt. Daraus läßt sich die optimale Versetzung (Minimalverlust) theoretisch bestimmen.

a) Potentialtheoretisches Berechnungsverfahren zum Entwurf eines Tandem-Pumpengitters. Das Berechnungsverfahren legt die Singularitätenmethode zugrunde, bei der eine Schaufel durch eine passend gewählte Wirbel- und Quellbelegung auf der Skelettlinie ersetzt wird, und sich das Strömungsfeld aus der Überlagerung der Translationsströmung und der resultierenden, von den Singularitätenbelegungen induzierten Geschwindigkeiten ergibt. Die gegenseitige Interferenz des Tandem-Pumpengitters wird dadurch erfaßt, daß sich die induzierte Geschwindigkeit von der Singularitätenbelegung der anderen Schaufelreihe mit der gegenseitigen Stellung der beiden Gitter zueinander ändert. Infolgedessen besteht die Aufgabe im wesentlichen in der Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten von der anderen Schaufelreihe. Bei der Berechnung sind Geschwindigkeitsdreieck, Schaufeltiefe und Gitterteilung der beiden Gitter sowie Abstand und Versetzung zwischen den beiden Gittern vorgegeben. Im übrigen wurde hierbei nur der für die Praxis hauptsächlich interessierende Fall behandelt, bei dem die beiden Gitter die gleiche Teilung besitzen.

Abb. 19 zeigt das gegebene Geschwindigkeitsdreieck für die Berechnung. Jedes der beiden Gitter besitzt ein eigenes Koordinatensystem (vgl. Abb. 20). Die Nullpunkte der beiden Koordinatensysteme befinden sich im Mittelpunkt der Schaufelsehne und haben voneinander den Abstand b_0 bzw. h_0 senkrecht bzw. parallel zur Schaufelfront. Die x-Richtung des Koordinatensystems I bzw. II ist parallel zur Grundströmung $W_{\infty\mathrm{I}}$ des Gitters I bzw. $W_{\infty\mathrm{II}}$ des Gitters II, und es gilt

$$\lambda_j = \beta_{\infty j} - \frac{\pi}{2} \quad (j = \mathrm{I} \text{ und } \mathrm{II}). \qquad (5.1)$$

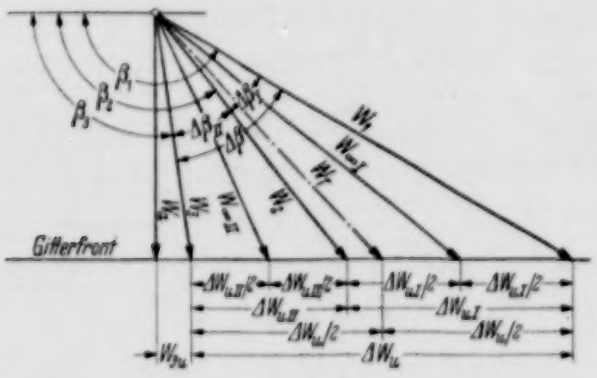


Abb. 19. Geschwindigkeitsdreieck für die Berechnung des Tandem-Pumpengitters.

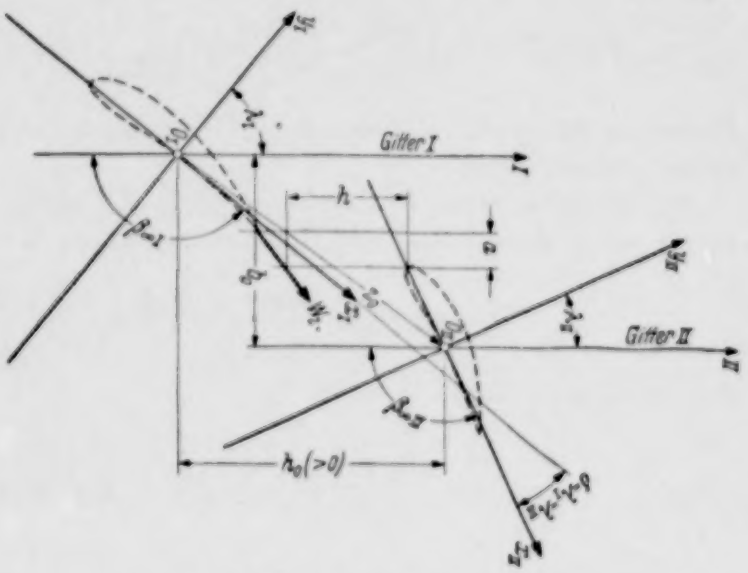


Abb. 20. Koordinatensysteme der beiden Gitter.

Damit sind die zwei Koordinatensysteme I und II für die beiden Gitter festgelegt, und die Ortsvektoren der beiden Systeme sind nach der Transformationsformel

$$z_{\mathrm{I}} = z_0 + z_{\mathrm{II}}\, e^{-i\delta} \quad \text{mit} \quad \delta = \lambda_{\mathrm{I}} - \lambda_{\mathrm{II}} \qquad (5.2)$$

miteinander verbunden.

[1] *N. Scholz*, Strömungsuntersuchungen an Schaufelgittern. Teil II: Ein Berechnungsverfahren zum Entwurf von Schaufelgitterprofilen, VDI-Forschungsheft 442 (1954).

[2] Siehe Fußnote 1 von Seite 202.

Zur Vereinfachung werden die Singularitäten statt auf der Skelettlinie auf der Schaufelsehne angeordnet. Hierdurch wird die Anwendbarkeit dieses Verfahrens auf Profile mit mäßiger Wölbung beschränkt. Die passend gewählte Wirbelbelegung $\gamma(x)$ auf der Schaufelsehne erzwingt die Umströmung der Skelettlinie, während eine zusätzliche Quellbelegung $q(x)$ die Schaufel auf die vorgegebene Dickenverteilung aufbläst. Aus der Wirbelbelegung folgt die Gleichung für die Gesamtzirkulation

$$\Gamma_j = \int_{-t_j/2}^{t_j/2} \gamma_j(x_j)\, dx_j \qquad (j = \mathrm{I}, \mathrm{II}), \tag{5.3}$$

und die Quellbelegung muß die Bedingung für eine geschlossene Schaufelkontur

$$Q_j = \int_{-t_j/2}^{t_j/2} q_j(x_j)\, dx_j = 0 \qquad (j = \mathrm{I}, \mathrm{II}) \tag{5.4}$$

erfüllen. Die Komponenten der induzierten Geschwindigkeiten u und v lassen sich als Summe verschiedener induzierter Geschwindigkeiten folgendermaßen darstellen:

$$u_j = (u_{jE\gamma} + u_{jEq}) + (u_{jR\gamma} + u_{jRq}) + (u_{jJ\gamma} + u_{jJq}), \tag{5.5a}$$

$$v_j = (v_{jE\gamma} + v_{jEq}) + (v_{jR\gamma} + v_{jRq}) + (v_{jJ\gamma} + v_{jJq}), \tag{5.5b}$$

mit $j = \mathrm{I}$ und II, wobei die Indizes in ihrer Reihenfolge anzeigen, erstens auf welcher Schaufel, zweitens von welcher Schaufel und drittens von welcher Singularitätenbelegung die Induktion erfolgt.

1. Induzierte Geschwindigkeit von der Einzelschaufel $\overline{w}_{jE}$. Die induzierte Geschwindigkeit im Punkt z von der Singularitätenbelegung der zu dem Punkt gehörenden Schaufelreihe $\overline{w}_G$ erhält man bekanntlich zu

$$\overline{w}_{jG}(z_j) = \frac{e^{i\lambda_j}}{2t} \int_{-t_j/2}^{t_j/2} [q_j(x_j') + i\,\gamma_j(x_j')]\, \mathfrak{Ctg}\left[\frac{\pi\, e^{i\lambda_j}}{t}(z_j - x_j')\right] dx_j'. \tag{5.6}$$

Wenn der Aufpunkt sich direkt auf der Sehne der betrachteten Schaufelreihe befindet, wird der Integrand am Aufpunkt unendlich. Das Integral ist dann als *Cauchy*scher Hauptwert zu verstehen. Läßt man in (5.6) die Größe $z \to x$, also $y \to 0$ gehen, so liefert der Grenzübergang für die komplexe Geschwindigkeit auf der x-Achse

$$\overline{w}_{jG}(x_j) = \pm\frac{\gamma_j(x_j) - i\,q_j(x_j)}{2} + \frac{e^{i\lambda_j}}{2t} \int_{-t_j/2}^{t_j/2} [q_j(x_j') + i\,\gamma_j(x_j')]\, \mathfrak{Ctg}\left[\frac{\pi\, e^{i\lambda_j}}{t}(x_j - x_j')\right] dx_j'. \tag{5.7}$$

Dabei gilt das positive Vorzeichen für die obere Schaufelseite und das negative Vorzeichen für die untere Schaufelseite.

Im Grenzübergang $t \to \infty$ liefert (5.7) die induzierte Geschwindigkeit der Einzelschaufel. Man erhält unter Benutzung der Reihenentwicklung des hyperbolischen Kotangens

$$\overline{w}_{jE}(x_j) = \pm\frac{\gamma_j(x_j) - i\,q_j(x_j)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-t_j/2}^{t_j/2} [q_j(x_j') + i\,\gamma_j(x_j')]\, \frac{dx_j'}{x_j - x_j'}, \tag{5.8}$$

also in Komponenten

$$u_{jE} = u_{jE\gamma} + u_{jEq} = \pm\frac{\gamma_j(x_j)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-t_j/2}^{t_j/2} \frac{q_j(x_j')}{x_j - x_j'}\, dx_j', \tag{5.8a}$$

$$v_{jE} = v_{jE\gamma} + v_{jEq} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-t_j/2}^{t_j/2} \frac{\gamma_j(x_j')}{x_j - x_j'}\, dx_j' \pm \frac{q_j(x_j)}{2}, \tag{5.8b}$$

mit $j = \mathrm{I}$ und II.

2. Induzierte Geschwindigkeit vom Restgitter $\overline{w}_{jR}$. Wenn man von der induzierten Geschwindigkeit eines ganzen Gitters $\overline{w}_{jG}$ nach (5.7) die induzierte Geschwindigkeit der Einzelschaufel $\overline{w}_{jE}$ nach (5.8) abzieht, erhält man daraus die induzierte Geschwindigkeit des Restgitters $\overline{w}_{jR}$ auf der x-Achse der betrachteten Schaufelreihe, wodurch das ganze Integral zweckmäßig in zwei Anteile, mit und ohne Singularität, aufgespalten werden kann:

$$\overline{w}_{jR} = \overline{w}_{jG} - \overline{w}_{jE} = \frac{e^{i\lambda_j}}{2t} \int_{-t_j/2}^{t_j/2} [q_j(x_j') + i\,\gamma_j(x_j')] \left\{\mathfrak{Ctg}\left[\frac{\pi\, e^{i\lambda_j}}{t}(x_j - x_j')\right] - \frac{t}{\pi\, e^{i\lambda_j}(x_j - x_j')}\right\} dx_j'. \tag{5.9}$$

Das in der geschweiften Klammer von (5.9) stehende Glied ist nun eine reguläre Funktion mit den Variablen λ_j und $(x_j - x_j')/t$. Führt man die folgende Einflußfunktion F ein:

$$F_j = R_j + i\, I_j = e^{i\lambda_j}\, \mathfrak{Ctg}\left(\pi\, e^{i\lambda_j}\frac{x_j - x_j'}{t}\right) - \frac{t}{\pi\,(x_j - x_j')}\,, \tag{5.10}$$

wobei

$$R_j = \frac{\cos\lambda_j\, \mathfrak{Sin}\left(2\pi\frac{x_j - x_j'}{t}\cos\lambda_j\right) + \sin\lambda_j \sin\left(2\pi\frac{x_j - x_j'}{t}\sin\lambda_j\right)}{\mathfrak{Cof}\left(2\pi\frac{x_j - x_j'}{t}\cos\lambda_j\right) - \cos\left(2\pi\frac{x_j - x_j'}{t}\sin\lambda_j\right)} - \frac{t}{\pi\,(x_j - x_j')} \tag{5.10a}$$

und

$$I_j = \frac{\sin\lambda_j\, \mathfrak{Sin}\left(2\pi\frac{x_j - x_j'}{t}\cos\lambda_j\right) - \cos\lambda_j \sin\left(2\pi\frac{x_j - x_j'}{t}\sin\lambda_j\right)}{\mathfrak{Cof}\left(2\pi\frac{x_j - x_j'}{t}\cos\lambda_j\right) - \cos\left(2\pi\frac{x_j - x_j'}{t}\sin\lambda_j\right)}\,, \tag{5.10b}$$

so lassen sich die Komponenten der induzierten Geschwindigkeit des Restgitters im eigenen Koordinatensystem wie folgt ausdrücken:

$$u_{jR} = u_{jR\gamma} + u_{jRq} = -\frac{1}{2t}\int_{-t_j/2}^{t_j/2} \gamma_j(x_j')\, I_j\, dx_j' + \frac{1}{2t}\int_{-t_j/2}^{t_j/2} q_j(x_j')\, R_j\, dx_j'\,, \tag{5.11a}$$

$$v_{jR} = v_{jR\gamma} + v_{jRq} = -\frac{1}{2t}\int_{-t_j/2}^{t_j/2} \gamma_j(x_j')\, R_j\, dx_j' - \frac{1}{2t}\int_{-t_j/2}^{t_j/2} q_j(x_j')\, I_j\, dx_j'\,, \tag{5.11b}$$

mit $j = \mathrm{I}$ und II.

3. Induzierte Geschwindigkeit von der anderen Schaufelreihe $\overline{w}_{jJ}$. Aus der Grundgleichung des induzierten Geschwindigkeitsfeldes nach (5.6) ergibt sich die vom Gitter I auf die Schaufelsehne des Gitters II induzierte Geschwindigkeit zunächst bezüglich des Koordinatensystems I zu

$$\overline{w}_{\mathrm{II}\,\mathrm{I}}(z_\mathrm{I}) = \frac{e^{i\lambda_\mathrm{I}}}{2t}\int_{-t_\mathrm{I}/2}^{t_\mathrm{I}/2} [q_\mathrm{I}(x_\mathrm{I}) + i\,\gamma_\mathrm{I}(x_\mathrm{I})]\,\mathfrak{Ctg}\left[\frac{\pi\, e^{i\lambda_\mathrm{I}}}{t}(z_\mathrm{I} - x_\mathrm{I})\right] dx_\mathrm{I}\,. \tag{5.12}$$

Mit Hilfe der Translationsgleichungen

$$z_\mathrm{I} = z_0 + z_\mathrm{II}\, e^{-i\delta} = (b_0 + i\, h_0)\, e^{-i\lambda_\mathrm{I}} + z_\mathrm{II}\, e^{-i\delta}$$

und

$$\overline{w}(z_\mathrm{I}) = \overline{w}(z_\mathrm{II})\, e^{i\delta}$$

lautet (5.12) im eigenen Koordinatensystem II

$$\begin{aligned}\overline{w}_{\mathrm{II}\,\mathrm{I}}(x_\mathrm{II}) &= \overline{w}_{\mathrm{II}\,\mathrm{I}}(z_\mathrm{I})\, e^{-i\delta} \\ &= \frac{e^{i\lambda_\mathrm{II}}}{2t}\int_{-t_\mathrm{I}/2}^{t_\mathrm{I}/2} [q_\mathrm{I}(x_\mathrm{I}) + i\,\gamma_\mathrm{I}(x_\mathrm{I})]\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi}{t}(b_0 + i\,h_0 + x_\mathrm{II}\, e^{i\lambda_\mathrm{II}} - x_\mathrm{I}\, e^{i\lambda_\mathrm{I}})\, dx_\mathrm{I}\,.\end{aligned} \tag{5.13a}$$

In gleicher Weise kann man die vom Gitter II auf die Schaufelsehne des Gitters I induzierte Geschwindigkeit $\overline{w}_{\mathrm{I}\,J}(x_\mathrm{I})$ bezüglich des eigenen Koordinatensystems I ableiten:

$$\overline{w}_{\mathrm{I}\,J}(x_\mathrm{I}) = \frac{-e^{i\lambda_\mathrm{I}}}{2t}\int_{-t_\mathrm{II}/2}^{t_\mathrm{II}/2} [q_\mathrm{II}(x_\mathrm{II}) + i\,\gamma_\mathrm{II}(x_\mathrm{II})]\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi}{t}(b_0 + i\,h_0 + x_\mathrm{II}\, e^{i\lambda_\mathrm{II}} - x_\mathrm{I}\, e^{i\lambda_\mathrm{I}})\, dx_\mathrm{II}\,. \tag{5.13b}$$

Das hyperbolische Glied der Integranden in (5.13a) und (5.13b) ist wieder eine reguläre Funktion auf der Schaufelsehne und es ergibt sich eine neue Einflußfunktion F_J mit den Variablen b_0, h_0, λ_I, λ_II, x_I und x_II:

$$F_J = R_J + i\, I_J = \mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi}{t}(b_0 + i\,h_0 + x_\mathrm{II}\, e^{i\lambda_\mathrm{II}} - x_\mathrm{I}\, e^{i\lambda_\mathrm{I}})\,, \tag{5.14}$$

wobei gilt

$$R_J = \frac{\mathfrak{Sin}\, 2X}{\mathfrak{Cof}\, 2X - \cos 2Y}, \tag{5.14a}$$

$$I_J = \frac{-\sin 2X}{\mathfrak{Cof}\, 2X - \cos 2Y}, \tag{5.14b}$$

$$X = \frac{\pi}{t}(b_0 + x_{II}\cos\lambda_{II} - x_I \cos\lambda_I),$$

$$Y = \frac{\pi}{t}(h_0 + x_{II}\sin\lambda_{II} - x_I \sin\lambda_I).$$

Mit Hilfe dieser neu definierten Einflußfunktion sind die induzierten Geschwindigkeiten in (5.13a) und (5.13b) umzuschreiben in

$$\bar{w}_{IJ}(x_I) = u_{IJ} - i\, v_{IJ} = \frac{-e^{i\lambda_I}}{2t} \int_{-l_{II}/2}^{l_{II}/2} [q_{II}(x_{II}) + i\,\gamma_{II}(x_{II})]\,(R_J + i\,I_J)\,dx_{II}, \tag{5.15a}$$

$$\bar{w}_{IIJ}(x_{II}) = u_{IIJ} - i\, v_{IIJ} = \frac{e^{i\lambda_{II}}}{2t} \int_{-l_I/2}^{l_I/2} [q_I(x_I) + i\,\gamma_I(x_I)]\,(R_J + i\,I_J)\,dx_I. \tag{5.15b}$$

Für die numerische Auswertung muß man die Gleichungen weiter in die Komponenten zerlegen. Hierbei gilt für Gitter I

$$u_{IJ\gamma}(x_I) = \frac{\sin\lambda_I}{2t}\int_{II}\gamma_{II}(x_{II})\,R_J(x_I, x_{II})\,dx_{II} + \frac{\cos\lambda_I}{2t}\int_{II}\gamma_{II}(x_{II})\,I_J(x_I, x_{II})\,dx_{II}, \tag{5.16a}$$

$$u_{IJq}(x_I) = \frac{\sin\lambda_I}{2t}\int_{II} q_{II}(x_{II})\,I_J(x_I, x_{II})\,dx_{II} - \frac{\cos\lambda_I}{2t}\int_{II} q_{II}(x_{II})\,R_J(x_I, x_{II})\,dx_{II}, \tag{5.16b}$$

$$v_{IJ\gamma}(x_I) = -\frac{\sin\lambda_I}{2t}\int_{II}\gamma_{II}(x_{II})\,I_J(x_I, x_{II})\,dx_{II} + \frac{\cos\lambda_I}{2t}\int_{II}\gamma_{II}(x_{II})\,R_J(x_I, x_{II})\,dx_{II}, \tag{5.16c}$$

$$v_{IJq}(x_I) = \frac{\sin\lambda_I}{2t}\int_{II} q_{II}(x_{II})\,R_J(x_I, x_{II})\,dx_{II} + \frac{\cos\lambda_I}{2t}\int_{II} q_{II}(x_{II})\,I_J(x_I, x_{II})\,dx_{II} \tag{5.16d}$$

und für Gitter II

$$u_{IIJ\gamma}(x_{II}) = -\frac{\sin\lambda_{II}}{2t}\int_{I}\gamma_I(x_I)\,R_J(x_I, x_{II})\,dx_I - \frac{\cos\lambda_{II}}{2t}\int_{I}\gamma_I(x_I)\,I_J(x_I, x_{II})\,dx_I, \tag{5.17a}$$

$$u_{IIJq}(x_{II}) = -\frac{\sin\lambda_{II}}{2t}\int_{I} q_I(x_I)\,I_J(x_I, x_{II})\,dx_I + \frac{\cos\lambda_{II}}{2t}\int_{I} q_I(x_I)\,R_J(x_I, x_{II})\,dx_I, \tag{5.17b}$$

$$v_{IIJ\gamma}(x_{II}) = +\frac{\sin\lambda_{II}}{2t}\int_{I}\gamma_I(x_I)\,I_J(x_I, x_{II})\,dx_I - \frac{\cos\lambda_{II}}{2t}\int_{I}\gamma_I(x_I)\,R_J(x_I, x_{II})\,dx_I, \tag{5.17c}$$

$$v_{IIJq}(x_{II}) = -\frac{\sin\lambda_{II}}{2t}\int_{I} q_I(x_I)\,R_J(x_I, x_{II})\,dx_I - \frac{\cos\lambda_{II}}{2t}\int_{I} q_I(x_I)\,I_J(x_I, x_{II})\,dx_I. \tag{5.17d}$$

Damit sind alle Komponenten der induzierten Geschwindigkeiten in (5.5) in einer praktisch brauchbaren Form dargestellt. Die numerischen Auswertungen der Integralglieder können nach der *Simpson*schen Regel durchgeführt werden [1, 2, 3].

Die Schaufelform ergibt sich aus der Überlagerung einer Wölbungsverteilung $y_s(x)$ der Skelettlinie und einer Dickenverteilung $r_K(x)$, und zwar in der Art, daß die Kontur aus den Enveloppen der eingeschriebenen Kreise mit den Halbmessern $r_K(x)$ um die Aufpunkte auf der Skelettlinie entsteht.

---

[1] *H. Ohashi*, Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Tandem-Pumpengittern starker Umlenkung. Dissertation der TH Braunschweig (1958).

[2] *F. Riegels* und *H. Wittich*, Zur Berechnung der Druckverteilung von Profilen, Jahrbuch Deutsch. Luftfahrtforsch. 1942, S. I 120.

[3] *T. Theodorsen* and *J. E. Garrick*, General potential theory of arbitrary wing section, NACA TR 452 (1933).

Die Skelettlinie y_s ergibt sich als Stromlinie, indem die betrachtete Schaufel nur mit einer Wirbelbelegung versehen wird, alle übrigen Schaufeln, auch die von der anderen Schaufelreihe, aber die vollständige Singularitätenbelegung erhalten. Hierbei gilt für die Neigung der Skelettlinie

$$\left(\frac{dy_s}{dx}\right)_j = \frac{V_{Tj} + v_{jR} + v_{jJ} + v_{jE\gamma}}{U_{Tj} + u_{jR} + u_{jJ}} \,. \tag{5.18}$$

Hieraus erhält man durch Integrieren über die x-Achse für die Skelettlinie

$$y_{sj} = \int_{-l_j/2}^{x_j} \frac{V_{Tj} + v_{jR} + v_{jJ} + v_{jE\gamma}}{U_{Tj} + u_{jR} + u_{jJ}} \, dx'_j \,. \tag{5.19}$$

Zur Ermittlung der Dickenverteilung der Schaufelkonturen wird ein krummliniges Koordinatensystem s und r längs der Skelettlinie bzw. senkrecht dazu eingeführt (vgl. Abb. 21). Nach der Kontinuitätsgleichung muß die von der Schaufelnase bis zur Stelle s auf Grund der Quellbelegung $q(s)$ ausgetretene Flüssigkeitsmenge innerhalb der Kontur bleiben. Daraus ergibt sich als Bedingung für die Dickenkoordinate die Gleichung

$$\frac{1}{2}\int_0^{s_j} q_j(s'_j)\, ds'_j = \int_0^{r_{Kj}} W_{sj}(s_j, r_j)\, dr_j \,. \tag{5.20}$$

Abb. 21. Zur Berechnung der Schaufelkontur.

Ersetzt man $W_{sj}(s_j, r)$ näherungsweise durch die Geschwindigkeit auf der Skelettlinie $W_{sj}(s_j)$, so erhält man

$$r_{Kj} = \frac{1}{2\,W_{sj}}\int_0^{s_j} q_j(s'_j)\, ds'_j = \frac{1}{2\,W_{sj}}\int_{-l_j/2}^{x_j} q_j(x'_j)\, dx'_j \,. \tag{5.21}$$

Hierbei ist die Skelettgeschwindigkeit $W_{sj}(s_j)$ aus dem induzierten Geschwindigkeitsfeld der vollständigen Singularitätenbelegung so anzuschreiben:

$$\begin{aligned} W_{sj}(s_j) &= W_{sj\gamma}(s_j) + u_{jEq}(s_j) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+y'^2_{sj}}}\left[U_{Tj} + u_{jR} + u_{jJ} + u_{jEq}(x_j) + y'_{sj}\,(V_{Tj} + v_{jR} + v_{jJ}) \pm \frac{\gamma_j(x_j)}{2}\right], \end{aligned} \tag{5.22}$$

wobei $W_{sj\gamma}(s_j)$ die Skelettgeschwindigkeit für den Fall bedeutet, bei dem die betrachtete Schaufel nur mit einer Wirbelbelegung versehen ist.

Die Geschwindigkeitsverteilung auf der Schaufelkontur W_{Kj} wird auf gleiche Weise wie beim Einzelgitter[1] aus dem gesamten induzierten Geschwindigkeitsfeld abgeleitet. Die Konturgeschwindigkeit lautet

$$W_{Kj} = \frac{W_{sj\gamma}}{\sqrt{1+r'^2_{Kj}}}\left(1 + \frac{u_{jEq}}{W_{sj}\sqrt{1+y'^2_{sj}}}\right). \tag{5.23}$$

Aus der Konturgeschwindigkeit kann man leicht nach der *Bernoulli*schen Gleichung die statische Druckverteilung p_K auf der Kontur erhalten:

$$\frac{p_K - p_1}{\frac{\varrho}{2}W_a^2} = \left(\frac{W_1}{W_a}\right)^2 - \left(\frac{W_K}{W_a}\right)^2 . \tag{5.24}$$

Aus den hier angegebenen Gleichungen sind die Schaufelkonturen und Konturgeschwindigkeitsverteilungen der beiden Gitter für gegebene Ausgangsdaten zu ermitteln. Hierbei erfordert naturgemäß der Rechenschritt für die Ermittlung der induzierten Geschwindigkeit von der anderen Schaufelreihe den größten Aufwand im ganzen Rechenverlauf.

b) Berechnungsbeispiele. Für die Berechnungsbeispiele an Tandem-Pumpengittern sind die Schaufelkonturen, Geschwindigkeitsverteilungen sowie daran anschließend die zugehörigen Verlustbeiwerte für die in der Tabelle 1 angegebenen Auslegungsdaten ermittelt worden. Das

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 215.

optimale Belastungsverhältnis ist nach Abb. 3 als $(\Delta W_{u\,\mathrm{I}}/\Delta W_u)^* = 0{,}5$ angenommen. Dadurch wird die Zwischenströmung und die Zirkulation festgelegt:

$$\beta_2 = 120{,}8^\circ\,, \qquad \Gamma_\mathrm{I}/l\,W_a = \Gamma_\mathrm{II}/l\,W_a = 0{,}596\,.$$

In diesem Fall stimmt die Translationsströmung W_T mit der Zwischenströmung W_2 überein. Die x-Richtung der beiden Koordinatensysteme wird parallel zur Grundströmung $W_{\infty\mathrm{I}}$ des Gitters I bzw. $W_{\infty\mathrm{II}}$ des Gitters II festgelegt. Um eine günstige Druckverteilung um die Schaufel zu gewährleisten, wurden die Wirbel- und Quellbelegungen wie in Abb. 22 ausgewählt.

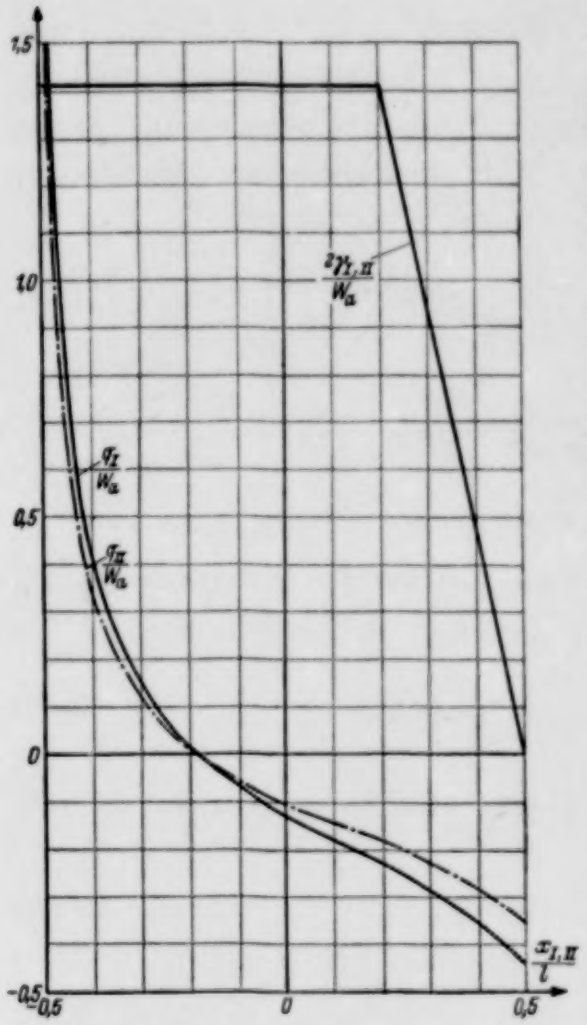


Abb. 22. Wirbelbelegung γ und Quellbelegung q längs der Schaufelsehne bei den Beispielrechnungen.

Die Rechnungen sind bei drei Anordnungen durchgeführt worden, nämlich bei Abstand $a/l = 0{,}1$ und Versetzung $h/t = 0$, bei Abstand $a/l = 0{,}1$ und Versetzung $h/t = 0{,}5$ und bei unendlich großem Abstand $a/l = \infty$. Die letzte Anordnung ohne Interferenz dient hierbei als Vergleichsbeispiel für den Interferenzeinfluß.

Die Rechenergebnisse zeigen, daß die Änderung der Skelettlinie mit der Versetzung schon bei verhältnismäßig kleinem Abstand $a/l = 0{,}1$ recht geringfügig ist, und zwar ändert sich der Schaufelwinkel mit der Versetzung bei Gitter I höchstens um 0,1°, bei Gitter II um 0,5°. Auch die Änderung der Dickenverteilung der beiden Gitter ist dabei nicht nennenswert. Aus diesen rechnerischen

Tabelle 1. *Auslegungsdaten der Rechenbeispiele für den Entwurf eines Tandem-Pumpengitters*

β_1	140°	λ_I	41,8°
β_2	120,8°	λ_II	16,6°
β_3	90°	δ	25,2°
$\Delta\beta$	50°	a/l	0,10
$\Delta\beta_\mathrm{I}$	19,2°	b_0/l	0,952
$\Delta\beta_\mathrm{II}$	30,8°	$\frac{h_0}{l}\left(\frac{h}{t}=0\right)$	0,567
$\beta_{\infty\mathrm{I}}$	131,8°	$\frac{h_0}{l}\left(\frac{h}{t}=0{,}5\right)$	0,067
$\beta_{\infty\mathrm{II}}$	106,6°	$l_{\mathrm{I,II}}/t$	1,00
$\Gamma/l\,W_a$	1,192	d_{max}/l	0,10
$\Gamma_{\mathrm{I;II}}/l\,W_a$	0,596	W_a	37 m/s

Ergebnissen kann man wohl die Folgerung ziehen, daß der Einfluß der gegenseitigen Interferenz auf die Schaufelkonturen schon bei kleinem Abstand $a/l = 0{,}1$ so gering ist, daß man beim Entwurf eines Tandem-Pumpengitters kaum darauf Rücksicht zu nehmen braucht, da die Abweichung der Konturen von denjenigen ohne Interferenz nur so groß ist wie die Genauigkeit bei der gewöhnlichen Schaufelherstellung.

Abb. 23 zeigt die Konturgeschwindigkeitsverteilungen beider Gitter. Bei Gitter I ist die Änderung der Konturgeschwindigkeit in der Nähe der Hinterkante ziemlich groß, dagegen ändert sich die Konturgeschwindigkeit des Gitters II in der Nähe der Vorderkante recht wenig. Es ist naheliegend, daß die Abweichung der Konturgeschwindigkeiten nur in dem hinteren Teil des Gitters I und in dem vorderen Teil des Gitters II entsteht, weil diese Teile der anderen Schaufelreihe besonders nahe stehen und am stärksten in deren Einflußgebiet liegen.

Anhand der oben ermittelten Konturgeschwindigkeiten wurden die Verlustbeiwerte der beiden Gitter nach dem grenzschichttheoretischen Verfahren von *L. Speidel* und *N. Scholz*[1] unter der Annahme berechnet, daß die Grenzschicht vollturbulent ist und die *Reynolds*zahl $Re_\mathrm{I} = W_2 l/\nu = 1{,}7 \cdot 10^5$ für Gitter I, $Re_\mathrm{II} = W_3 l/\nu = 1{,}5 \cdot 10^5$ für Gitter II beträgt. Die Ergebnisse sind in Abb. 24 dargestellt. Bei Gitter I ändert sich der Verlustbeiwert periodisch mit der Versetzung und weicht maximal um 7,5% vom Mittelwert ab. Der Minimalverlust tritt bei Versetzung $h/t = 0{,}5$ auf und der Maximalverlust

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 202.

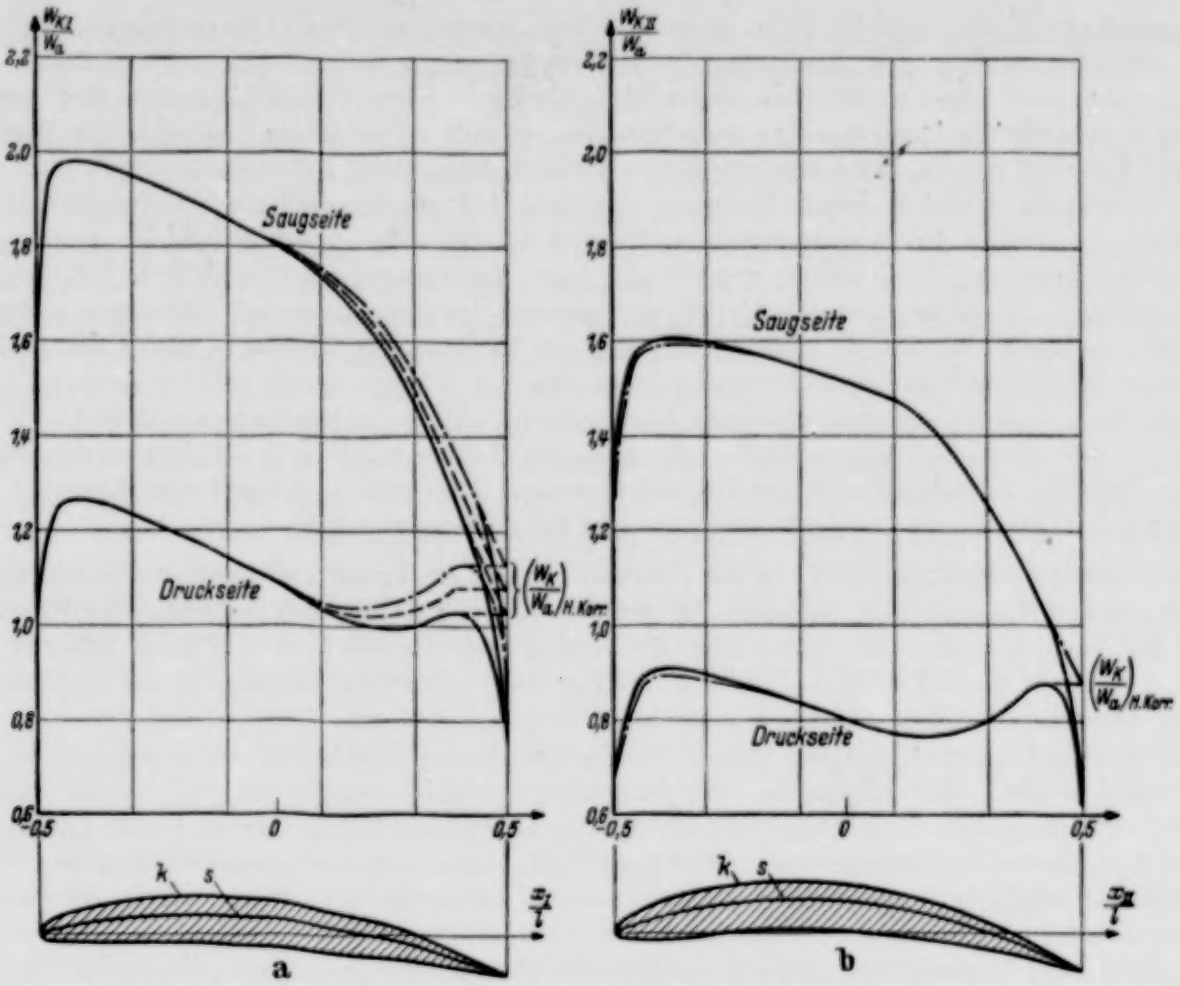


Abb. 23. Ermittelte Konturgeschwindigkeitsverteilung. — a) Auf der Schaufelkontur des Gitters I, b) Auf der Schaufelkontur des Gitters II.
——— bei Abstand $a/l = 0{,}1$ und Versetzung $h/t = 0$;
——— . ——— bei Abstand $a/l = 0{,}1$ und Versetzung $h/t = 0{,}5$;
– – – – – – – – – bei Abstand $a/l = \infty$, ohne Interferenz.

Die ermittelten Schaufelkonturen bei $a/l = 0{,}1$ und Versetzung $h/t = 0$ sind mit eingezeichnet, s) Skelettlinie, k) von Skelettlinie und Dickenverteilung aufgebaute Schaufelkontur.

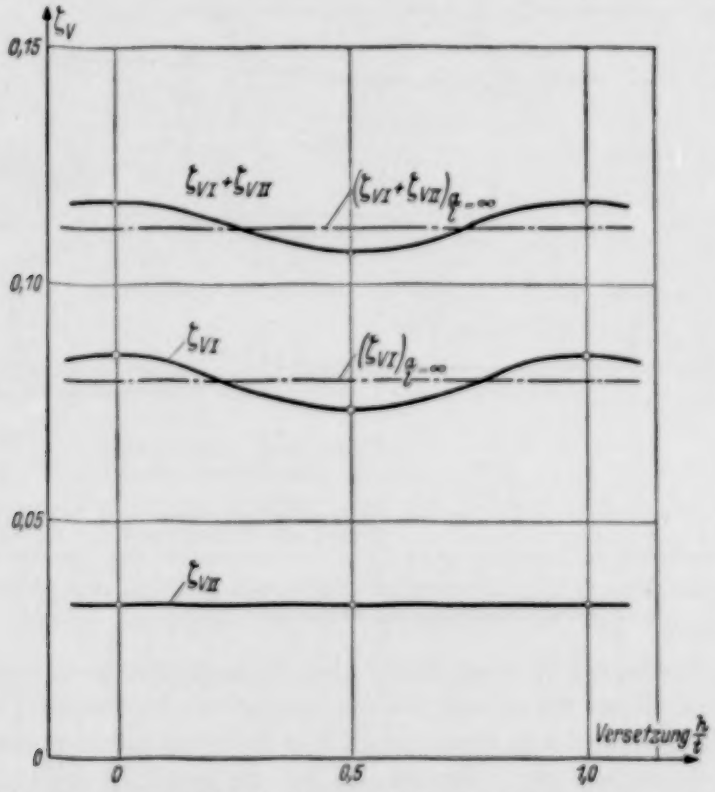


Abb. 24. Änderung der gerechneten Verlustbeiwerte des Tandem-Pumpengitters mit der Versetzung.
$Re_I = W_a \cdot l/\nu = 1{,}7 \cdot 10^5$, $Re_{II} = W_a \cdot l/\nu = 1{,}5 \cdot 10^5$.
——— Verlustbeiwerte bei Abstand $a/l = 0{,}1$;
——— . ——— Verlustbeiwerte bei Abstand $a/l = \infty$.

bei Versetzung $h/t = 0$. Der Mittelwert der Verluste stimmt mit dem Verlustbeiwert ohne Interferenz gut überein. Die Verlustbeiwerte des Gitters II ändern sich demgegenüber kaum, weil die Änderung der Konturgeschwindigkeit vernachlässigbar gering ist. Der resultierende Verlustbeiwert von den beiden Gittern ändert sich ebenfalls periodisch mit Abweichung von 5% vom Mittelwert, und die Phase der Schwankung stimmt mit derjenigen des Gitters I überein.

Diese rechnerischen Ergebnisse beweisen deutlich, daß die Schwankung der Verluste des Gitters I im wesentlichen durch eine potential-theoretische Betrachtung erfaßt werden kann, weil die rechnerische Änderung der Verluste des Gitters I mit der Versetzung hinsichtlich der Stärke und der Phase der Schwankung mit den Meßergebnissen sehr gut übereinstimmt. Demgegenüber kann die in Wirklichkeit auftretende starke Änderung der Verluste des Gitters II nicht mit der Potentialtheorie, sondern nur mit einer grenzschicht-theoretischen Betrachtung erklärt werden.

Nach den hier gewonnenen Ergebnissen kann man im allgemeinen beim Entwurf der Schaufelkonturen des Tandem-Pumpengitters mit mäßigem Abstand ($a/l > 0{,}10$) die Gitter mit guter Näherung als zwei an sich selbständige Gitter betrachten. Darüberhinaus kann man durch Auswahl der günstigsten Versetzung für den Verlust ein Minimum erhalten.

6. Interferenzeinfluß einer Delle in der Zuströmung auf die Verluste der nachstehenden Schaufel. Um den bei den Messungen an Tandem-Pumpengittern deutlich beobachteten starken Interferenzeinfluß der Nachlaufdellen vom Gitter I auf die Schaufelverluste des Gitters II noch näher zu untersuchen, wurde ein einfacher Modellversuch durchgeführt. Um den Vorgang dieses Einflusses der Delle zu verstehen, könnte man sich zunächst vorstellen, daß eine Delle in der Zuströmung die Druckverteilung der nachstehenden Schaufel beeinflußt, und daß sich daraus eine gewisse Änderung der Verluste ergibt. Die Ergebnisse der Druckverteilungsmessungen zeigen jedoch, daß sich die Druckverteilung durch eine Delle sehr geringfügig ändert und dadurch keine große Änderung der Verluste zu erwarten ist. Infolgedessen muß eine Delle in der Zuströmung unmittelbar den Vorgang der Grenzschichtbildung, vor allem die Ablösungspunkte an der Schaufel, stark beeinflussen und die entsprechende Änderung der Verluste zur Folge haben.

Die Strömung in einer Delle enthält gewiß eine kleinere kinetische Energie als die Strömung außerhalb der Delle. Deshalb wird beim Überwinden des von der Außenströmung aufgeprägten Druckanstieges die Strömung in der Delle eher als die ungestörte Strömung ihre kinetische Energie erschöpfen und infolgedessen eher ablösen, so daß daraus ein gewisser Zuwachs der Verluste folgt. Dieser Vorgang wird hierbei Interferenzeffekt der Delle genannt.

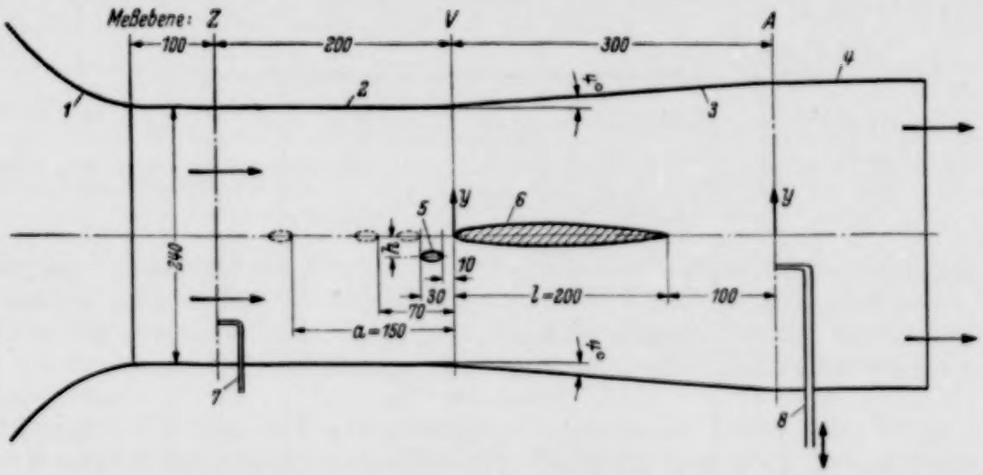


Abb. 25. Versuchsanordnung für die experimentelle Bestimmung des Interferenzeinflusses einer Delle in der Zuströmung auf die Verluste der nachstehenden Schaufel. — *1* Reduzierdüse, *2* Einlaufteil, *3* Diffusorteil, *4* Austrittsteil, *5* Störkörper, verstellbar und austauschbar, *6* Meßschaufel NACA 0010, *7* Meßsonde für den statischen Druck p_Z, *8* Nachlaufsonde für den Gesamtdruck g_A und statischen Druck p_A.

a — Abstand zwischen dem Störkörper und der Meßschaufel,
h — seitliche Versetzung des Störkörpers.

Andererseits hat die Strömung in einer Delle eine kleinere mittlere Geschwindigkeit und einen entsprechend kleineren mittleren Staudruck als die ungestörte Strömung. Weil sich der Reibungs- und Druckwiderstand einer Schaufel in einem ähnlichen Strömungsfeld proportional zum Staudruck ändert, kann eine Delle direkt vor der Schaufel die Verminderung des Widerstandes bzw. des Verlustes verursachen. Dies soll als Schatteneffekt der Delle bezeichnet werden[1].

[1] *P. Ruden*, Windkanalmessungen über den Windschatteneinfluß auf Rechtecktragflügel mit symmetrischem Profil, Jahrbuch Deutsch. Luftfahrtforsch. 1940, S. I 204.

In Wirklichkeit treten beide Effekte gleichzeitig auf, und zwar in einem bestimmten Verhältnis, welches von der Stärke des Druckanstieges längs der Schaufel und von der Anordnung der auftreffenden Delle abhängig ist[1].

Die Versuchsanordnung ist in Abb. 25 dargestellt. Es wurde in vereinfachter Weise eine Einzelschaufel vom Profil NACA 0010 in einen Diffusor mit 8° Öffnungswinkel eingebaut, dessen Druckanstieg etwa demjenigen eines gewöhnlichen Pumpengitters entspricht. Weil das Problem nur den Vorgang der Grenzschichtbildung auf der Schaufelkontur betrifft, genügt es, den Druckgradienten längs der Schaufel in dieser Weise festzulegen, um den Einfluß der Delle zu untersuchen. Bei den Untersuchungen wurden die gewünschten Dellen in der Zuströmung mit Hilfe von zwei verschiedenen Störkörpern erzeugt. Beide Störkörper sind leicht austauschbar und können parallel zur Schaufel in verschiedenen Abständen und seitlichen Versetzungen angeschraubt werden.

Die Nachlaufmessungen sind zunächst in Meßebene V (Vorderkante der Meßschaufel) ohne Meßschaufel nur mit den Störkörpern durchgeführt worden, um zu bestimmen, wie die Nachläufe der Störkörper in der Vorderkantenebene aussehen. Anhand dieser Nachlaufmessungen kann man die Geometrie der Dellen in Abhängigkeit von der Anordnung der Störkörper bestimmen und gleichzeitig die Verlustbeiwerte der Störkörper allein ermitteln. Dann sind die systematischen Nachlaufmessungen in Meßebene A (halbe Schaufeltiefe hinter der Meßschaufel) bei verschiedenen Anordnungen der Störkörper durchgeführt worden.

Der Verlustbeiwert ζ'_V ist hierbei als Energieverlust nach der Gleichung

$$\zeta'_V = \frac{\text{Energieverlust}}{\text{Strahlenergie in } Z\text{-Ebene}} = \int_{\text{in Delle}} \frac{W(y)}{W_Z} \frac{g_Z - g(y)}{\frac{\varrho}{2} W_Z^2} \frac{dy}{l} \tag{6.1}$$

definiert. Diese Definition hat den Vorteil, daß sie auch bei der verzögerten Grundströmung für einen bestimmten Energieverlust unabhängig von der Meßebene immer den gleichen Verlustbeiwert liefert. Weil der Nachlauf in Meßebene A die beiden Verlustdellen vom Störkörper und von der Meßschaufel enthält, ergeben sich die Verlustbeiwerte der Meßschaufel als Differenz der Gesamtverluste und der Störkörperverluste nach der Formel

$$\zeta'_{VS} = \int \frac{W_A(y)}{W_Z} \frac{g_Z - g_A(y)}{\frac{\varrho}{2} W_Z^2} \frac{dy}{l} - \int \frac{W_V(y)}{W_Z} \frac{g_Z - g_V(y)}{\frac{\varrho}{2} W_Z^2} \frac{dy}{l}. \tag{6.2}$$

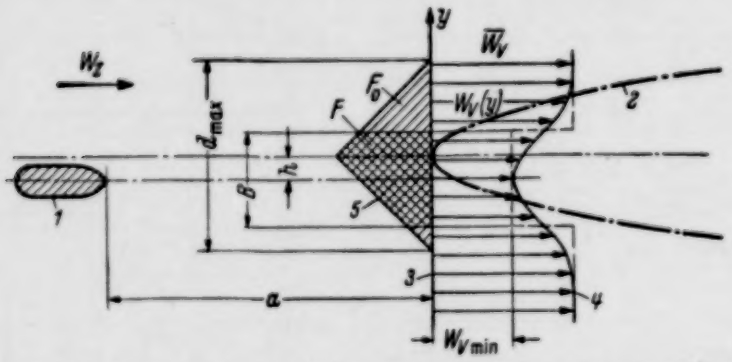


Abb. 26. Charakteristische Parameter einer Nachlaufdelle und Zusammenhang mit der Meßschaufel.
1) Störkörper, 2) Meßschaufel, 3) Meßebene V, 4) Nachlaufdelle des Störkörpers ohne Meßschaufel, 5) Einflußdreieck der auftreffenden Delle.

$W_{V\,min}/W_Z$: Tiefe der Delle;
B : Charakteristische Breite der Delle;
F_0 : Fläche des Einflußdreiecks mit Grundlinie d_{max};
F : von der charakteristischen Breite B bedeckte Fläche des Dreiecks.

Bei allen Messungen wurde die Zuströmgeschwindigkeit $W_Z = 44$ m/s eingehalten. Die auf die Zuströmgeschwindigkeit bezogene *Reynolds*zahl der Schaufel betrug daher

$$Re = \frac{W_Z l}{\nu} = 5{,}8 \cdot 10^5.$$

In diesen Untersuchungen läßt sich die Geometrie der auftreffenden Dellen durch ihre Tiefe und eine charakteristische Breite darstellen (vgl. Abb. 26). Die Tiefe der Dellen ist hierbei dem

[1] *K. Bursig*, Experimentelle und theoretische Untersuchungen über die Strömung um ein Tragflügelprofil bei Druckabfall und Druckanstieg und bei ungleichförmiger Zuströmung, Diplom-Arbeit Nr. 53 des Instituts für Strömungsmechanik der Techn. Hochsch. Braunschweig (1958).

folgenden Verhältnis entsprechend quantitativ festgelegt:

$$\frac{\text{Minimalgeschwindigkeit der Delle}}{\text{Zuströmgeschwindigkeit}} = \frac{W_{V\,min}}{W_Z}.$$

Die charakteristische Breite der Delle B läßt sich als die Breite eines angenommenen rechteckigen Loches in der Zuströmgeschwindigkeit definieren, welches die gleiche Tiefe und die gleiche Ver-

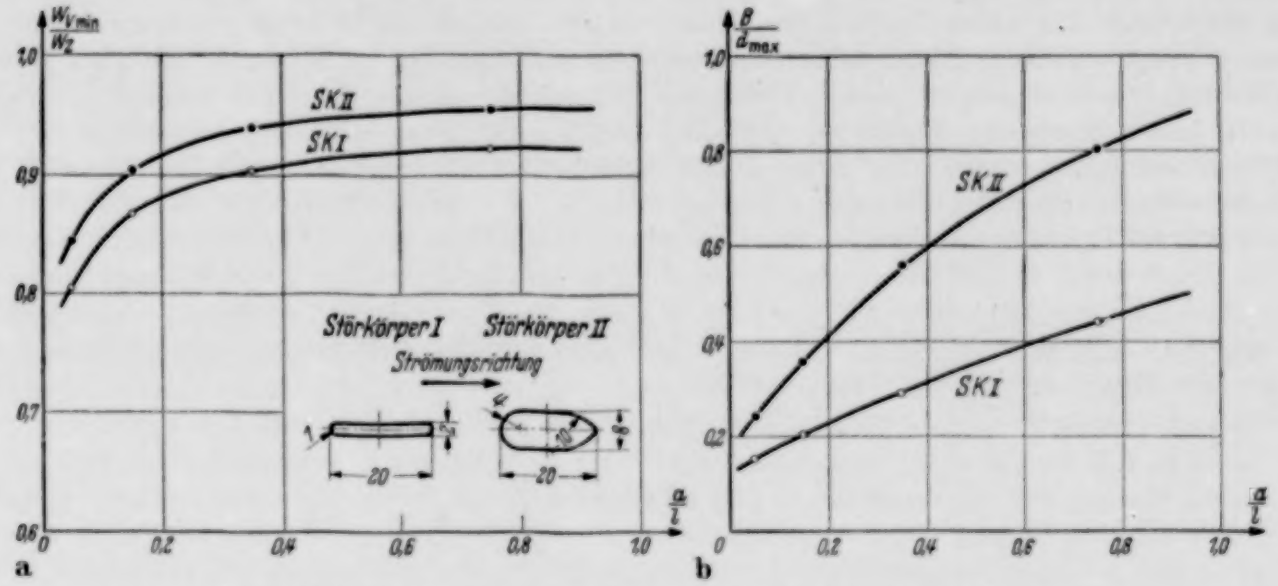


Abb. 27. Änderung der charakteristischen Parameter der Dellen mit dem Abstand a.
a) Änderung der Tiefe der Dellen bei Störkörper I und II, b) Änderung der charakteristischen Breite der Dellen bei Störkörper I und II.

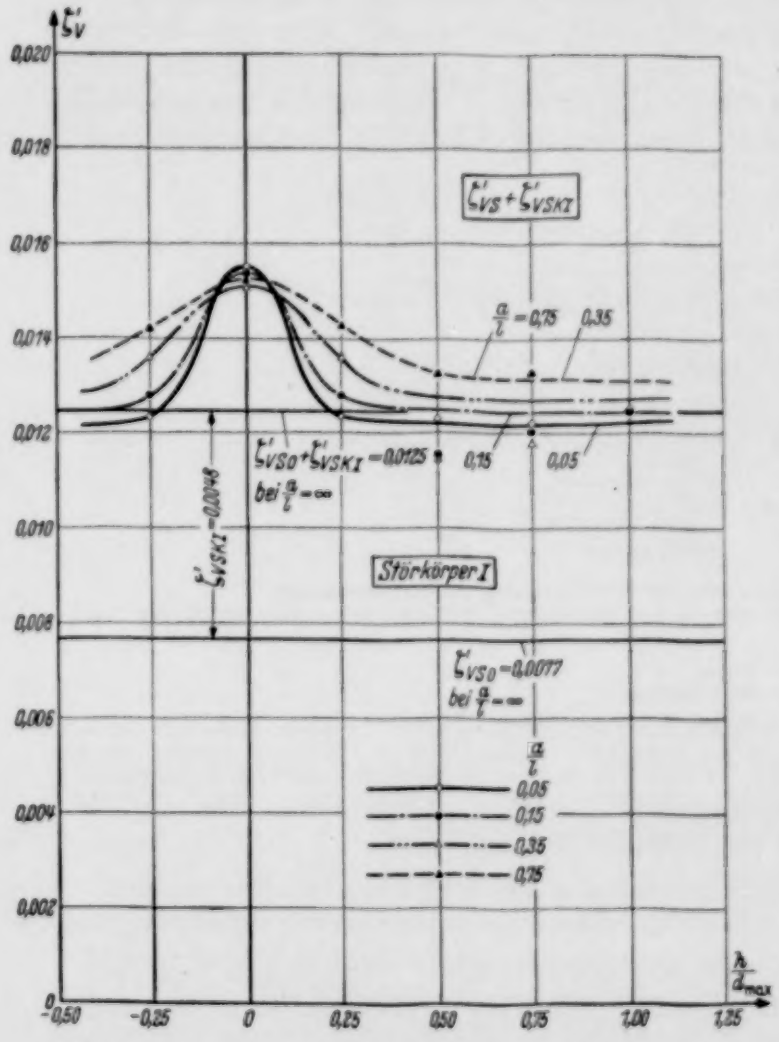


Abb. 28. Änderung der Verlustbeiwerte mit der seitlichen Versetzung bei verschiedenen Abständen für Störkörper I.
$Re = W_Z \cdot l/\nu = 5{,}8 \cdot 10^5$.

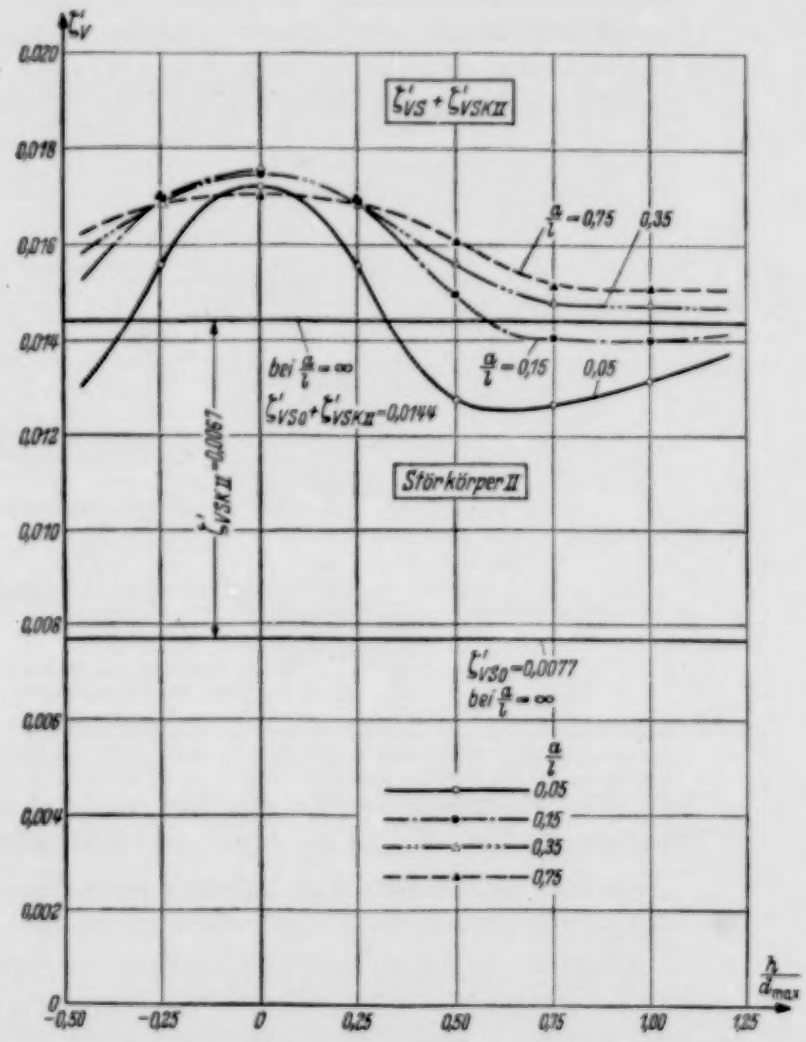


Abb. 29. Änderung der Verlustbeiwerte mit der seitlichen Versetzung bei verschiedenen Abständen für Störkörper II.
$Re = W_Z \cdot l/\nu = 5{,}8 \cdot 10^5$.

drängungsdicke wie die ursprüngliche Delle besitzt. Die charakteristische Breite ergibt sich dann nach der Formel

$$B = \frac{1}{\overline{W}_V - W_{V\,min}} \int_{\text{in Delle}} [\overline{W}_V - W_V(y)]\, dy\,. \tag{6.3}$$

Dabei bedeutet $\overline{W}_V$ die ungestörte Zuströmgeschwindigkeit außerhalb der Delle in Meßebene V. Die Änderung der Tiefe und der charakteristischen Breite der Dellen ist in Abhängigkeit von der Anordnung der Störkörper in Abb. 27a und b dargestellt.

Aus den systematischen Nachlaufmessungen in Meßebene A wurden die Verlustbeiwerte ermittelt, die die Verluste der Meßschaufel ζ'_{VS} und des Störkörpers ζ'_{VSK} enthalten. Sie wurden für die Störkörper I und II in Abb. 28 bzw. 29 über der seitlichen Versetzung bei verschiedenen Abständen der Störkörper aufgetragen. Die ausgezogenen geraden Linien geben dabei die Verlustbeiwerte der Meßschaufel bzw. der Störkörper wieder, die ohne Interferenzeinfluß einzeln gemessen wurden. Sie werden für die Messungen mit Interferenz zum Vergleich herangezogen.

Wie bei Tandem-Pumpengittern nehmen die Schaufelverluste auch hier unter dem Einfluß einer Delle in der Zuströmung stark zu. Es ist daraus deutlich zu erkennen, daß eine die Schaufelmitte treffende Delle in der Zuströmung die Schaufelverluste um etwa 35 bis 40% vergrößert, wobei die Verluste kaum von der Tiefe und Breite der Delle abhängen. Der Interferenzeinfluß einer Delle vermindert sich allmählich mit zunehmender seitlicher Versetzung; und wie man sich leicht vorstellen kann, verschwindet der Interferenzeinfluß einer Delle mit einer schmaleren charakteristischen Breite bei kleinerer seitlicher Versetzung.

Der Interferenzeinfluß einer Delle ist praktisch abgeklungen, wenn die Delle so weit versetzt wird, daß die charakteristische Breite der Delle sich außerhalb der Maximaldicke der Schaufel befindet.

Die Verlustkurve bei Abstand $a/l = 0{,}05$ mit Störkörper II in Abb. 29 zeigt zwischen $h/d_{max} = 0{,}50$ und 0,75 einen starken negativen Interferenzeinfluß der Delle. Das beudetet aber nicht, daß eine Delle bei dieser Anordnung einen günstigen Einfluß auf die Schaufelverluste ausübt, sondern nur, daß der Störkörper dabei auf die Meßschaufel wie ein Vorflügel wirkt und daß der Verlust des Störkörpers selbst wegen der beschleunigten Strömung durch den Spalt abnimmt. Daraus ergibt sich eine Verminderung des Gesamtverlustes.

Der Interferenzeinfluß hängt von drei Parametern ab, nämlich von der Tiefe der Delle, der Breite der Delle und der seitlichen Versetzung. Das verursacht die Schwierigkeit, den Einfluß dieser drei Parameter in einem Diagramm darzustellen. Dazu ist ein Versuch unternommen worden, aus der charakteristischen Breite und der seitlichen Versetzung einen einzigen neuen Parameter

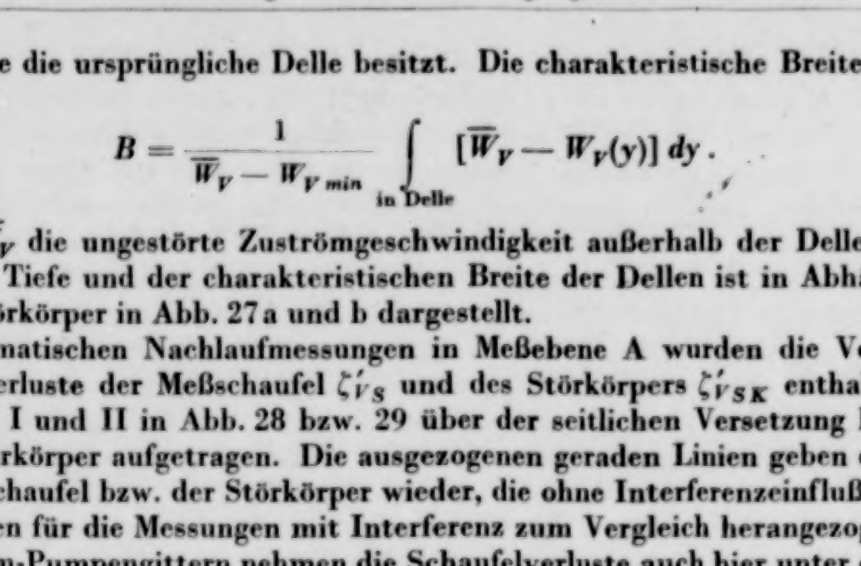


Abb. 30. Relative Änderung der Schaufelverluste in Abhängigkeit von der Tiefe $q_{V\,min}/q_Z = (W_{V\,min}/W_Z)^2$ und der Überdeckungsziffer K der auftreffenden Delle.

Druckanstieg des Diffusors: $\frac{p_A - p_Z}{\frac{\varrho}{2} W_Z^2} = 0{,}195$; Reynoldszahl: $Re = W_Z \cdot l/\nu = 5{,}8 \cdot 10^4$.

zu bilden und die Ergebnisse in Abhängigkeit von nur zwei Parametern in einem allgemeingültigen Diagramm darzustellen. Ein neuer Parameter — Überdeckungsziffer K — wird mit Hilfe der Darstellung in Abb. 26 durch die Definition $K = F/F_0$ festgelegt. Sämtliche Meßergebnisse sind in Abb. 30 dargestellt, und zwar sind die relativen Änderungen der Verluste hierbei als Linien

konstanter Interferenzeinflüsse in Abhängigkeit von der Tiefe $q_{V\,min}/q_Z = (W_{V\,min}/W_Z)^2$ und der Überdeckungsziffer K eingetragen. Bei jeder Tiefe der Delle nehmen die Schaufelverluste mit der Überdeckungsziffer zu, und der Einfluß der Überdeckungsziffer auf das Anwachsen der Verluste ist um so größer, je tiefer die auftreffende Delle ist.

Um den in wirklichen Tandem-Pumpengittern auftretenden Interferenzeinfluß der Delle quantitativ analysieren zu können, muß man solche Untersuchungen bei verschiedenen Druckanstiegen längs der Schaufel durchführen, da der Druckgradient einer Schaufel im Gitterverband auf der Saug- und Druckseite verschieden ist. Das Einflußdiagramm in Abb. 30 gilt nur für den gemessenen Druckanstieg.

Parallel zu den experimentellen Untersuchungen ist auf verschiedene Weise versucht worden, den Interferenzeinfluß mit einer grenzschicht-theoretischen Betrachtung zu erklären. Diese theoretischen Behandlungen haben aber alle ergeben, daß der Schatteneffekt viel stärker als der Interferenzeffekt auftritt und die resultierenden Schaufelverluste unter dem Einfluß einer Delle stark absinken, während die gemessenen Verluste stets um etwa 35 bis 40% größer sind.

Dieser große Unterschied zwischen der Messung und der Theorie ist vermutlich darauf zurückzuführen, daß ein Störkörper nicht nur ein Nachlaufprofil hinter sich erzeugt, sondern auch gleichzeitig sehr ausgeprägte Turbulenz oder sogar eine Art intermittierende Störung der Strömung wie in einer Wirbelstraße in seinem Nachlauf hervorruft. Solche starke Turbulenz oder Störung kann natürlich den Vorgang der Grenzschichtbildung stark beeinflussen und einen großen Interferenzeffekt zur Folge haben, der von der Theorie bisher nicht erfaßt werden kann.

7. Zusammenfassung. Es wurden die Strömungsvorgänge in ebenen Tandem-Pumpengittern mit starker Umlenkung theoretisch und experimentell untersucht.

Zunächst wurden ohne Berücksichtigung der gegenseitigen Interferenz optimale Tandem-Gitteranordnungen für beliebig vorgegebene Geschwindigkeitsdreiecke untersucht, und zwar auf Grund von Ergebnissen an Einzelschaufelgittern mit Profilen NACA 0010, 4410 und 8410. Die Ergebnisse sind in Diagrammen dargestellt, die bei der Entwurfsaufgabe in der Praxis unmittelbar benutzt werden können. Es ergibt sich weiterhin, daß in dem Bereich $c_A\, l/t > 1{,}2$ das Tandem-Pumpengitter geringere Verluste liefert als das entsprechende Einzelgitter.

Der Einfluß der gegenseitigen Interferenz wurde an einem Tandem-Pumpengitter aus Profilen NACA 8410, das ohne Interferenzeinfluß eine Umlenkung von 50° beim Zuströmwinkel $\beta_1 = 140°$ verwirklicht, experimentell untersucht; Nachlauf- und Druckverteilungsmessungen wurden bei verschiedenen Abständen und Versetzungen der beiden Gitter zueinander durchgeführt.

Die Meßergebnisse zeigen, daß sich die Verluste des Gitters I sinusförmig mit der Versetzung ändern, was auf einen rein potentialtheoretischen Interferenzeinfluß hindeutet, während die Verluste des Gitters II etwa konstant bleiben und nur dann stark zunehmen, wenn sich die Schaufeln des Gitters II in den Dellen vom Gitter I befinden, was auf eine Interferenz der Grenzschichten beider Gitter schließen läßt.

Beim üblichen Abstand von $a/l = 0{,}15$ bis $0{,}50$ ist die Versetzung dann am günstigsten, wenn sich die beiden Schaufeln wie bei einem Spaltflügel mit einer Spaltweite von $^1/_5$ der Teilung anordnen, erstens weil der Gesamtverlust dabei am kleinsten ist (etwa 10% kleiner als ohne Interferenz) und zweitens weil der Abströmwinkel mit demjenigen ohne Interferenz sehr gut übereinstimmt und daher keine Korrektur für den Abströmwinkel nötig ist. Sind die optimalen Teilungsverhältnisse der beiden Gitter verschieden, sollen die beiden Schaufeltiefen so bestimmt werden, daß die beiden Gitter die gleiche Teilung besitzen.

Um optimale Anordnungen von Tandem-Pumpengittern unter Berücksichtigung der gegenseitigen Interferenz theoretisch bestimmen zu können, wurde ferner ein potentialtheoretisches Rechenverfahren zum Entwurf eines Tandem-Pumpengitters entwickelt (erste Hauptaufgabe). Die Rechenbeispiele ergeben, daß die Strömungsvorgänge am Gitter I gut mit der Theorie erfaßt werden können, während die bei Messungen beobachtete starke Änderung der Verluste des Gitters II nicht damit zu erklären ist.

Es wurde daher eingehend der Interferenzeinfluß einer Delle in der Zuströmung auf die Verluste der nachstehenden Schaufel, der für die Änderung der Verluste des Gitters II eine entscheidende Rolle spielt, an einem vereinfachten Modell untersucht. Durch eine Delle in der Zuströmung können die Verluste an der Schaufel in einer verzögerten Strömung je nach der Geometrie und der Lage der auftreffenden Delle relativ zur Schaufel stark zunehmen. Bei mäßigem Druckanstieg nehmen die Schaufelverluste durch eine Delle, die gerade die Schaufelmitte trifft, um etwa 35 bis 40% zu.

(Eingegangen am 2. September 1958.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Hideo Ohashi*, Ichikawashi (Japan), Suganomachi 2—529.

A note on thermal stresses in hollow cylinders*

By M. M. Stanišić and R. M. McKinley

1. Introduction. *R. Trostel*[1] has recently given a solution for the stress field in hollow cylinders with axial and rotational symmetry subjected to a steady-state temperature field, and such that the axial strain component can be assumed constant. His solutions allow for a variation in the physical properties of the media, but are restricted to the case in which the *Poisson* ratio is one-half ($\nu = 1/2$). Approximate extensions of these solutions for general ν are given in this paper which differ from the exact solutions by less than 3% in magnitude. Where higher accuracy is desired, a numerical method illustrated in the paper may be employed.

2. Nomenclature. We denote

T = $T(r)$ = Temperature, °C,
$E(T)$ = *Young*'s Modulus, kg/cm²,
τ_{ji} = component, in the i-coordinate direction, of the stress vector acting on a surface whose normal is in the j-coordinate direction, kg/cm²,
e_{ii} = unit extension in the i-coordinate direction of an element initially parallel to the i-coordinate direction, dimensionless,
ν = *Poisson*'s ratio, dimensionless,
$\alpha(T)$ = coefficient of thermal expansion, $(°C)^{-1}$,
r_0 = external cylinder radius, cm,
r_i = internal radius of cylinder, cm,
p_i, p_0 = pressures imposed on the internal and external surfaces of the hollow cylinder respectively, kg/cm²,
$\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r)$, $\varphi_3(r)$ = integrals defined by equations (18)—(20),
$\psi(r)$ = stress function (not in the Airy sense) defined by equation (14),
T_i, T_0 = internal and external surface temperatures, respectively, of the hollow cylinder, °C,
D = $\frac{d}{dr}$ = the differentiation operator,
δ = $y\left(r + \frac{h}{2}\right) - y\left(r - \frac{h}{2}\right)$ = central difference operator,
δ^2 = $y_{n+1} - 2\,y_n + y_{n-1}$,
h = space increment in the independent variable,
ε = the shifting operator,
$\varepsilon\,p(r)$ = $p\,(r + h)$,
Δ = the forward difference operator,
$\Delta\,p(r)$ = $p\,(r + h) - p(r)$,
∇ = the backward difference operator,
$\nabla\,p(r)$ = $p(r) - p\,(r - h)$,
λ = thermal conductivity, cal/sec — cm² — (°C/cm).

3. Approximate solutions of the Problem. The generalized *Hooke*'s law for isotropic media whose properties may vary with temperature gives the following relation between the normal elastic stresses, thermal stresses, and the corresponding strains (referred to a cylindrical coordinate system):

$$\frac{du}{dr} = e_{rr} = \frac{1}{E(T)}\left[\tau_{rr} - \nu\,(\tau_{\Theta\Theta} + \tau_{zz})\right] + \int_{\Theta=0}^{\Theta=T} \alpha(\Theta)\,d\Theta\,, \tag{1}$$

$$\frac{u}{r} = e_{\Theta\Theta} = \frac{1}{E(T)}\left[\tau_{\Theta\Theta} - \nu\,(\tau_{zz} + \tau_{rr})\right] + \int_{\Theta=0}^{\Theta=T} \alpha(\Theta)\,d\Theta\,, \tag{2}$$

$$e_{zz} = \frac{1}{E(T)}\left[\tau_{zz} - \nu\,(\tau_{rr} + \tau_{\Theta\Theta})\right] + \int_{\Theta=0}^{\Theta=T} \alpha(\Theta)\,d\Theta\,. \tag{3}$$

* *M. M. Stanišić*, Lectures in Mathematical Elasticity during summer semester 1958, Purdue University.
[1] *R. Trostel*, Ing.-Arch. 26 (1958) S. 134.

The conditions for static equilibrium reduce in the case of axial and rotational symmetry and zero body forces to

$$\frac{d\tau_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(\tau_{rr} - \tau_{\Theta\Theta}) = 0 . \tag{4}$$

The one independent equation of compatibility follows directly from the left-hand sides of equations (1) and (2):

$$r\frac{de_{\Theta\Theta}}{dr} = \frac{du}{dr} - \frac{u}{r}$$

hence

$$r\frac{de_{\Theta\Theta}}{dr} + (e_{\Theta\Theta} - e_{rr}) = 0 . \tag{5}$$

It will be assumed in this paper that the axial component of strain is constant

$$e_{zz} = A_1$$

in which case equation (3) gives an expression for the axial stress component:

$$\tau_{zz} = \nu(\tau_{rr} + \tau_{\Theta\Theta}) + A_1 E(T) - E(T)\int_{\Theta=0}^{\Theta=T}\alpha(\Theta)\,d\Theta . \tag{6}$$

If the ends of the cylinder are constrained from moving $e_{zz} = 0 = A_1$ whereas, if the ends are free and are acted on by a force P, the constant A_1 is obtained from the condition of equilibrium

$$\int_{r_0}^{r_i} 2\pi r\,\tau_{zz}\,dr = P . \tag{7}$$

Trostel takes $\nu = 1/2$ and operates directly on equations (1), (2), (3), (4), and (6) to obtain the radial component of the displacement vector and the stress field. The resulting solutions are, however, not applicable to the more common cases in which ν lies in the range of 1/3 to 1/4. Since the general problem appears not to have a solution in terms of quadratures alone, it is the purpose of this paper to determine corrections factors which will allow the use of *Trostel's* equations with the same order of accuracy as usually found in experimental data for the variation of physical properties with temperature. For this purpose, it is more convenient to work through the compatibility equation (5). Using equation (6) to eliminate τ_{zz} from equations (1) and (2) gives

$$e_{rr} = \frac{1}{E(T)}[(1-\nu^2)\tau_{rr} - \nu(1+\nu)\tau_{\Theta\Theta} - \nu A_1 E(T)] + (1+\nu)\int_{\Theta=0}^{\Theta=T}\alpha(\Theta)\,d\Theta , \tag{8}$$

$$e_{\Theta\Theta} = \frac{1}{E(T)}[(1-\nu^2)\tau_{\Theta\Theta} - \nu(1+\nu)\tau_{rr} - \nu A_1 E(T)] + (1+\nu)\int_{\Theta=0}^{\Theta=T}\alpha(\Theta)\,d\Theta , \tag{9}$$

$$e_{\Theta\Theta} - e_{rr} = \frac{1+\nu}{E(T)}(\tau_{\Theta\Theta} - \tau_{rr}) . \tag{10}$$

Noting that $E(T) = E[T(r)]$, equation (9) then gives

$$\frac{de_{\Theta\Theta}}{dr} = -\frac{1}{E^2}\frac{dE}{dr}[(1-\nu^2)\tau_{\Theta\Theta} - \nu(1+\nu)\tau_{rr}] + \frac{1-\nu^2}{E}\frac{d\tau_{\Theta\Theta}}{dr} - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\frac{d\tau_{rr}}{dr} + (1+\nu)\alpha(T)\frac{dT}{dr} . \tag{11}$$

From equation (4):

$$r\frac{d\tau_{rr}}{dr} = (\tau_{\Theta\Theta} - \tau_{rr})$$

so that

$$r\frac{de_{\Theta\Theta}}{dr} = -\frac{r}{E^2}\frac{dE}{dr}[(1-\nu^2)\tau_{\Theta\Theta} - \nu(1+\nu)\tau_{rr}] + (1-\nu^2)\frac{r}{E}\frac{d\tau_{\Theta\Theta}}{dr} - \nu(1+\nu)\frac{1}{E}(\tau_{\Theta\Theta} - \tau_{rr}) + (1+\nu)r\alpha(T)\frac{dT}{dr} . \tag{12}$$

Substituting equations (10) and (12) into the compatibility equation (5)

$$-r\frac{dE}{dr}\left(\tau_{\Theta\Theta} - \frac{\nu}{1-\nu}\tau_{rr}\right) + rE\frac{d\tau_{\Theta\Theta}}{dr} + E(\tau_{\Theta\Theta} - \tau_{rr}) + \frac{1}{1-\nu}rE^2\alpha(T)\frac{dT}{dr} = 0 . \tag{13}$$

Suppose that there exists a function $\psi(r)$ of at least class C^2 such that

$$\tau_{rr} = \frac{\psi}{r} \tag{14}$$

then from equation (4)

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{d\psi}{dr} \tag{15}$$

and

$$\frac{d\tau_{\theta\theta}}{dr} = \frac{d^2\psi}{dr^2}$$

follows

$$(\tau_{\theta\theta} - \tau_{rr}) = \frac{d\psi}{dr} - \frac{\psi}{r} .$$

Substituting these expressions into equation (13) and collecting terms we have

$$(r\,E)\frac{d^2\psi}{dr^2} + (E - r\,E')\frac{d\psi}{dr} + \left(\frac{\nu}{1-\nu} r\,E' - E\right)\frac{\psi}{r} = -\frac{1}{1-\nu} r\,E^2\alpha(T)\frac{dT}{dr} \tag{16}$$

where

$$E' = \frac{dE}{dr} .$$

It may be varified that equation (16) has no solution by simple quadratures by assuming that $E(r)$ may be expressed as polynomials in r and examining the *Riccati* equation corresponding to (16).

For the case $\nu = 1/2$, equation (16) reduces to

$$(r\,E)\frac{d^2\psi}{dr^2} + (E - r\,E')\frac{d\psi}{dr} + (r\,E^1 - E)\frac{\psi}{r} = - \quad r\,E^2\alpha(T)\frac{dT}{dr} . \tag{17}$$

A particular solution of the reduced equation

$$(r\,E)\frac{d^2\psi}{dr^2} + (E - r\,E')\frac{d\psi}{dr} + (r\,E' - E)\frac{\psi}{r} = 0$$

is seen by inspection to be $\psi_0 = r$.

The general solution of equation (17) is then obtained by making the substitution

$$\psi(r) = \psi_0\,\varphi(r) = r\,\varphi(r)$$

which gives

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \left(\frac{3}{r} - \frac{E'}{E}\right)\frac{d\varphi}{dr} = -2\frac{E}{r}\alpha(T)\frac{dT}{dr} .$$

This is of the first order in $d\varphi/dr$ and may be solved directly:

$$\frac{d\varphi}{dr} = -2\frac{E}{r^2}\int r^2\alpha(T)\frac{dT}{dr}\,dr + c_1\frac{E}{r^3} ,$$

by a second integration

$$\varphi = -2\int\frac{E}{r^3}\left(\int r^2\alpha(T)\frac{dT}{dr}\,dr\right)dr + c_1\int\frac{E}{r^3}\,dr + c_2$$

where c_1 and c_2 are constants of integration. Finally we have

$$\psi = r\,\varphi$$

$$\psi = -2\,r\int\frac{E}{r^3}\left(\int r^2\alpha(T)\frac{dT}{dr}\,dr\right)dr + c_1\,r\int\frac{E}{r^3}\,dr + c_2\,r .$$

From equations (14) and (15) follows

$$\tau_{rr} = \frac{\psi}{r} = -2\int\frac{E}{r^3}\left(\int r^2\alpha(T)\frac{dT}{dr}\,dr\right)dr + c_1\int\frac{E}{r^3}\,dr + c_2 ,$$

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{d\psi}{dr} = -2\int\frac{E}{r^3}\left(\int r^2\alpha(T)\frac{dT}{dr}\,dr\right)dr - 2\frac{E}{r^2}\int r^2\alpha(T)\frac{dT}{dr}\,dr + c_1\int\frac{E}{r^3}\,dr + c_1\frac{E}{r^2} + c_2 .$$

If the constants of integration are determined subject to the boundary conditions

$$r = r_i: \qquad \tau_{rr} = -p_i\,,$$
$$r = r_0: \qquad \tau_{rr} = -p_0$$

and the following notation, introduced by *Trostel*, is employed:

$$\varphi_1(r) = \int_{r_i}^{r} \frac{E}{r^3}\,dr\,, \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2(r) &= \frac{E}{r^3}\int r^2\,\alpha(T)\,\frac{dT}{dr}\,dr\,, \\ \varphi_2(r) &= \frac{E}{r^3}\,r^2\int_{\Theta=0}^{\Theta=T}\alpha(\Theta)\,d\Theta - 2\int r\left(\int_{\Theta=0}^{\Theta=T}\alpha(\Theta)\,d\Theta\right)dr\,, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_3(r) &= \int_{r_i}^{r}\frac{E}{r^3}\left(\int r^2\,\alpha(T)\,\frac{dT}{dr}\,dr\right)dr\,, \\ \varphi_3(r) &= \int_{r_i}^{r}\frac{1}{r}\,\varphi_2(r)\,dr\,, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

one finally obtains for the stress field corresponding to $\nu = 1/2$

$$\tau_{rr} = -p_i - (p_0 - p_i)\left(\frac{\varphi_1(r)}{\varphi_1(r_0)}\right) + 2\varphi_3(r_0)\left(\frac{\varphi_1(r)}{\varphi_1(r_0)} - \frac{\varphi_3(r)}{\varphi_3(r_0)}\right), \tag{21}$$

$$\tau_{\Theta\Theta} = -p_i - (p_0 - p_i)\left(\frac{\frac{E}{r^2} + \varphi_1(r)}{\varphi_1(r_0)}\right) + 2\varphi_3(r_0)\left(\frac{\frac{E}{r^2} + \varphi_1(r)}{\varphi_1(r_0)} - \frac{\varphi_2(r) + \varphi_3(r)}{\varphi_3(r_0)}\right), \tag{22}$$

$$\tau_{zz} = \frac{1}{2}\,(\tau_{rr} + \tau_{\Theta\Theta}) + A_1\,E - E\int_{\Theta=0}^{\Theta=T}\alpha(\Theta)\,d\Theta\,. \tag{23}$$

These are the solutions obtained by *Trostel*.

Rather than simplifying the general equation (16), let

ψ = a solution of the general equation (16),

$\psi_{(1/2)}$ = a solution for the case $\nu = 1/2$, eqn. (17)

and examine the differential equation for the difference:

$$r\,E\,[\psi'' - \psi''_{(1/2)}] + [E - r\,E']\,[\psi' - \psi'_{(1/2)}] + \left[\frac{\nu}{1-\nu}\,r\,E' - E\right]\frac{\psi}{r} - [r\,E' - E]\,\frac{\psi_{(1/2)}}{r} = \frac{1-2\,\nu}{1-\nu}\,E^2\,r\,\alpha(T)\,\frac{dT}{dr} \tag{24}$$

where primes denote differentiation with respect to r.

Let $\mathfrak{h} = \psi - \psi_{(1/2)}$, then equation (24) suggests the approximation

$$(r\,E)\,\mathfrak{h}'' + (E - r\,E')\,\mathfrak{h}' + (r\,E' - E)\,\frac{\mathfrak{h}}{r} = \frac{1-2\,\nu}{1-\nu}\,r\,E^2\alpha(T)\,\frac{dT}{dr}\,. \tag{25}$$

Equation (25) is solved in the same manner as equation (17) to give

$$\mathfrak{h} = \frac{1-2\,\nu}{1-\nu}\,r\int\frac{E}{r^3}\left(\int r^2\,\alpha(T)\,\frac{dT}{dr}\,dr\right)dr + a_1\,r\int\frac{E}{r^3}\,dr + a_2\,r\,. \tag{26}$$

From the definition of $\mathfrak{h}$ it follows that

$$(\tau_{rr})_{\nu} = (\tau_{rr})_{1/2} + \frac{\mathfrak{h}}{r}\,, \tag{27}$$

$$(\tau_{\Theta\Theta})_{\nu} = (\tau_{\Theta\Theta})_{1/2} + \frac{d\mathfrak{h}}{dr}\,. \tag{28}$$

Since τ_{rr} is specified on the boundary, the constants of integration a_1 and a_2 are determined by the conditions

$$r = r_i: \qquad \mathfrak{h} = 0\,,$$
$$r = r_0: \qquad \mathfrak{h} = 0\,.$$

On substituting into equations (27) and (28), the approximations to the stress field for general ν are obtained as

$$\tau_{rr} = -p_i - (p_0 - p_i)\left(\frac{\varphi_1(r)}{\varphi_1(r_0)}\right) + \frac{1}{1-\nu}\varphi_3(r_0)\left(\frac{\varphi_1(r)}{\varphi_1(r_0)} - \frac{\varphi_3(r)}{\varphi_3(r)_0}\right), \tag{29}$$

$$\tau_{\Theta\Theta} = -p_i - (p_0 - p_i)\left(\frac{\frac{E}{r^2} + \varphi_1(r)}{\varphi_1(r_0)}\right) + \frac{1}{1-\nu}\varphi_3(r_0)\left(\frac{\frac{E}{r^2} + \varphi_1(r)}{\varphi_1(r_0)} - \frac{\varphi_2(r) + \varphi_3(r)}{\varphi_3(r_0)}\right), \tag{30}$$

$$\tau_{zz} = \nu(\tau_{rr} + \tau_{\Theta\Theta}) + A_1 E - E\int_{\Theta=0}^{\Theta=T} \alpha(\Theta)\, d\Theta . \tag{31}$$

The error in these approximations will be considered in the section on appliaction, however, since $\nu \leqq 1/2$, equation (31) shows that the error in τ_{zz} is no greater the larger error in either τ_{rr} or $\tau_{\Theta\Theta}$.

The radial component of the displacement vector is obtained from equations (2) and (9):

$$u(r) = \frac{r}{E(T)}[(1-\nu^2)\tau_{\Theta\Theta} - \nu(1+\nu)\tau_{rr}] - \nu r A_1 + (1+\nu) r \int_{\Theta=0}^{\Theta=T(r)} \alpha(\Theta)\, d\Theta . \tag{32}$$

There are two limiting cases in which equations (29)—(32) are exact. The first case for $\nu = 1/2$ is obvious from construction. The second case is that of constant physical properties (denoted by 0-subscript) where the following reductions occur

[a] $$T(r) = T_i - (T_i - T_0)\frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{\ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right)}$$ (this temperature field is deduced in the first application given later),

$$\frac{dT}{dr} = \frac{T_0 - T_i}{\ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right)}\left(\frac{1}{r}\right),$$

[b] $$\varphi_1(r) \to E_0 \int_{r_i}^{r} \frac{1}{r^3}\, dr = \frac{E_0}{2}\left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r^2}\right),$$

[c] $$\varphi_2(r) \to \frac{\alpha_0 E_0}{r^2}\int r^2 \frac{dT}{dr}\, dr = \frac{\alpha_0 E_0 (T_0 - T_i)}{\ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right)}\frac{1}{r^2}\int r\, dr ,$$

$$\varphi_2(r) \to \frac{\alpha_0 E_0 (T_0 - T_i)}{2\ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right)},$$

[d] $$\varphi_3(r) \to \frac{\alpha_0 E_0 (T_0 - T_i)}{2\ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right)}\int_{r_i}^{r}\frac{dr}{r} = \frac{\alpha_0 E_0 (T_0 - T_i)}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{\ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right)}\right),$$

[e] $$\int_{\Theta=0}^{\Theta=T(r)} \alpha(\Theta)\, d\Theta = \alpha_0 T(r) = \alpha_0\left[T_0 - (T_0 - T_i)\frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{\ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right)}\right].$$

Equations (29), (30), and (31) become

$$\tau_{rr} = -p_i - (p_0 - p_i)\left(\frac{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^2}\right) + \frac{\alpha_0 E_0 (T_0 - T_i)}{2(1-\nu)}\left(\frac{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^2} - \frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{\ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right)}\right), \tag{33}$$

$$\tau_{\Theta\Theta} = -p_i - (p_0 - p_i)\left(\frac{1 + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^2}\right) + \frac{\alpha_0 E_0 (T_0 - T_i)}{2(1-\nu)}\left(\frac{1 + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^2} - \frac{1 + \ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{\ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right)}\right), \tag{34}$$

$$\tau_{zz} = \nu(\tau_{rr} + \tau_{\Theta\Theta}) + A_1 E_0 - \alpha_0 E_0\left[T_0 - (T_0 - T_i)\frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)}\right], \tag{35}$$

which are exact solutions[1]. The radial component of the displacement vector, equation (32), becomes

$$u(r) = \frac{r}{E_0}\left[(1-\nu^2)\,\tau_{\Theta\Theta} - \nu\,(1+\nu)\,\tau_{rr}\right] - \nu\,A_1\,r + (1+\nu)\,\alpha_0\,r\left[T_0 - (T_0 - T_i)\,\frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)}\right]. \tag{36}$$

4. Numerical solution for the stress function. For a reliable estimate of the error in the approximations given previously, it will be necessary to have a solution of the complete equation (16) for the stress function $\psi(r)$. The equation is in standard form as given below

$$\psi'' + \left(\frac{1}{r} - \frac{E'}{E}\right)\psi' + \left(\frac{\nu}{1-\nu}\frac{E'}{E} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}\right)\psi = -\frac{1}{1-\nu}\alpha(T)\,E\,\frac{dT}{dr}. \tag{37}$$

Since equation (37) is linear, it is amendable to several methods of numerical solution[2]. One particular method which takes advantage of the magnitude of the coefficients in equation (37) will be developed in this section.

For convenience, introduce the following notation:

$$P(r) = \left(\frac{1}{r} - \frac{E'}{E}\right), \tag{38}$$

$$P'(r) = \frac{dP}{dr} = \left[\left(\frac{E'}{E}\right)^2 - \frac{E''}{E} - \frac{1}{r^2}\right], \tag{39}$$

$$Q(r) = \left(\frac{\nu}{1-\nu}\frac{E'}{E} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}\right), \tag{40}$$

$$F(r) = -\frac{1}{1-\nu}\alpha(T)\,E\,\frac{dT}{dr} \tag{41}$$

and make the change of variable in equation (37)

$$\left.\begin{aligned} \psi &= y\,e^{-\frac{1}{2}\int P(r)\,dr}, \\ \psi &= y\,e^{-\frac{1}{2}(\ln r - \ln E)} = y\,e^{-\frac{1}{2}\ln\frac{r}{E}} \\ \psi &= y\left(\frac{E}{r}\right)^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

which reduces it to the equation

$$y'' + f(r)\,y = g(r) \tag{44}$$

where

$$f(r) = \frac{1}{4}\left\{4\,Q(r) - 2\,P'(r) - [P(r)]^2\right\}, \tag{45}$$

$$\left.\begin{aligned} g(r) &= \left[e^{\frac{1}{2}\int P(r)\,dr}\right][F(r)], \\ g(r) &= \left(\frac{r}{E}\right)^{1/2} F(r) \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

and with boundary conditions:

$$r = r_i: \quad y = -\,p_i\,r_i\left(\frac{E(r_i)}{r_i}\right)^{-1/2}, \tag{47}$$

$$r = r_0: \quad y = -\,p_0\,r_0\left(\frac{E(r_0)}{r_0}\right)^{-1/2}. \tag{48}$$

Since equation (44) is linear, if y_1 and y_2 are any two linearly independent solutions of the reduced equation

$$y'' + f(r)\,y = 0 \tag{49}$$

and y_0 is a particular solution of the complete equation (44), then the general solution of equation (44) is

$$y = c_1\,y_1 + c_2\,y_2 + y_0. \tag{50}$$

Since in the numerical solution one condition is known, namely y at r_i, there is only one independent constant and the general solution (50) may be written as

$$y = c_1\,y_1 + y_0. \tag{51}$$

[1] See for example *Chi-Teh Wang*, Applied Elasticity, p. 75, New York 1953, who takes $p_i = p_0 = 0$, $A_1 = 0$.

[2] *W. E. Milne*, Numerical Solution of Differential Equations, Chapter 7, New York 1953.

The scheme for numerical calculations is then to determine y_0 such that it satisfies equation (44) and the initial boundary condition (47).

Then y_1 is determined such that it satisfies equation (49) and the initial boundary condition

$$r = r_i: \quad y_1 = 0\,, \tag{52}$$

then the constant c_1 is determined by the condition that

$$y(r_0) = c_1\, y_1(r_0) + y_0(r_0) \tag{53}$$

must satisfy the final boundary condition (48).

To solve equation (44), it will be reduced to a second order difference equation. The following symbolic identity relating the differentiation operator D the central difference operator δ and spacing increment of the independent variable, $h = \Delta r$, may be established[1]:

$$D = \frac{2}{h}\sinh^{-1}\left(\frac{\delta}{2}\right), \tag{54}$$

$$D = \frac{1}{h}\left(\delta - \frac{1^2}{2^2\cdot 3!}\delta^3 + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^4\cdot 5!}\delta^5 - \cdots\right),$$

$$D^2 = \frac{1}{h^2}\left(\delta - \frac{1^2}{2^2\cdot 3!}\delta^3 + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^4\cdot 5!}\delta^5 - \cdots\right)^2,$$

$$D^2 = \frac{1}{h^2}\left(\delta^2 - \frac{1}{12}\delta^4 + \frac{1}{90}\delta^6 - \frac{1}{560}\delta^8 + \cdots\right),$$

$$y'' \cong \frac{1}{h^2}\left(\delta^2 - \frac{1}{12}\delta^4 + \frac{1}{90}\delta^6\right) y\,. \tag{55}$$

Operating on equation (55) with δ^2 gives

$$\delta^2 y'' = \frac{1}{h^2}\left(\delta^4 y - \frac{1}{12}\delta^6 y\right)$$

whereas carrying out the same operation on equation (44) gives

$$\delta^2 y'' + \delta^2\,[f(r)\,y] = \delta^2\,[g(r)]\,.$$

These last two results provide the relation

$$\delta^2\,[g(r)] - \delta^2\,[f(r)\,y] = \frac{1}{h^2}\left(\delta^4 y - \frac{1}{12}\delta^6 y\right). \tag{56}$$

It is desirable to eliminate $\delta^4 y$ from equation (56) to increase the order of the process. Noting that equations (44) and (55) both give expressions for y'', we may obtain an expression for $\delta^4 y$

$$h^2\,[g(r) - f(r)\,y] = \delta^2 y - \frac{1}{12}\delta^4 y + \frac{1}{90}\delta^6 y\,,$$

$$\delta^4 y = -12\,h^2 g(r) + 12\,h^2 f(r)\,y + 12\,\delta^2 y + \frac{12}{90}\delta^6 y\,.$$

Substituting this expression into equation (56) gives

$$h^2\,\delta^2\,[g(r)] - h^2\,\delta^2\,[f(n)\,y] = -12\,h^2 g(r) + 12\,h^2 f(r)\,y + 12\,\delta^2 y + \frac{12}{90}\delta^6 y - \frac{1}{12}\delta^6 y\,,$$

$$-\delta^2\,[12\,y + h^2 f(r)\,y] - 12\,h^2 f(r)\,y = -h^2\,\delta^2\,[g(r)] - 12\,h^2 g(r) + \frac{1}{20}\delta^6 y\,,$$

$$\delta^2\left(1 + \frac{h^2 f(r)}{12}\right) y + h^2 f(r)\,y = h^2 g(r) + \frac{h^2\,\delta^2 g(r)}{12} - \frac{\delta^6 y}{240} \tag{57}$$

where

$$\delta^2 g(r) = g_{n+1} - 2\,g_n + g_{n-1}\,. \tag{58}$$

For convenience, denote

$$Y = \left[1 + \frac{h^2 f(r)}{12}\right] y \tag{59}$$

[1] *F. B. Hildebrand*, Introduction to Numerical Analysis, p. 136, New York 1956.

or

$$y = \frac{Y}{1 + \frac{h^2 f(r)}{12}},$$

$$M(r) = h^2 g(r) + \frac{h^2 \delta^2 g(r)}{12}, \tag{60}$$

$$N(r) = \frac{h^2 f(r)}{1 + \frac{h^2 f(r)}{12}}. \tag{61}$$

Then equation (57) may be written more compactly as

$$\delta^2 Y + N(r)\, Y = M(r) - \frac{\delta^6 y}{240}.$$

For a reasonable choice of space increment, h, the stress function is of such a nature that it may be quite accurately approximated by polynomials of degree four or less so that the truncation error in dropping the term $\delta^6 y/240$ can be considered to be zero. Noting also that

$$\delta^2 Y = Y_{n+1} - 2\, Y_n + Y_{n-1},$$

we finally arrive at the difference equation by which equation (44) is to be replaced:

$$Y_{n+1} = M_n(r) + [2 - N_n(r)]\, Y_n - Y_{n-1}. \tag{62}$$

The difference equation corresponding to the reduced equation (49) is obtained by setting $M(r) = 0$ in equation (62)

$$Y_{n+1} = [2 - N_n(r)]\, Y_n - Y_{n-1}. \tag{63}$$

Equations (62) and (63) afford a high accuracy solution for the variable Y and, by the inverse transformations, for the stress function φ.

If however, we choose the space increment such that

$$h \cong 0.10$$

then we are usually justified in making considerable simplifications in these equations and still retain four significant figure accuracy. In the first place

$$h^2 f(r) \cong 5 \cdot 10^{-5}$$

so that to five significant figures

$$Y \cong y.$$

We then notice that

$$N(r) \cong 5 \cdot 10^{-5}.$$

If $N(r)$ is dropped, the propagated error at the n^{th} step of the solution is seen directly from equation (62) not to exceed

$$e_n \leqq n\, [N(r)\, y]_{Max}$$

which after 100-steps amounts to approximately

$$e_n \leqq 25 \cdot 10^{-2} \qquad (y = 100).$$

Moreover, in most cases with four significant figures

$$M(r) = h^2 g(r).$$

With these simplifications, equations (62) and (63) appear as

$$y_{n+1} = h^2 g(r) + 2\, y_n - y_{n-1}, \tag{64}$$

$$y_{n+1} = 2\, y_n - y_{n-1}. \tag{65}$$

In solving equation (65), it is convenient to take y_1 in some unit of 1, disregarding decimal point, since the solution may then be written down by inspection as proceeding by units of 1 ($y_0 = 0$ by equation (52), that is

r	y
12.0	0
12.1	0.1
12.2	0.2
12.3	0.3
.	.
.	.

The differentiation operator developed in equation (55) in terms of central differences is not convenient for use in calculating values of $\tau_{\theta\theta}$ from a numerical tabulation of the stress function ψ. The operator can be derived in terms of forward or backward difference operators. If the necessary analyticity of a function is assumed and it is expanded in a *Taylors* series, one immediately establishes the symbolic identity relating the differentiation operator D the shifting operator $\varepsilon\, p = p\,(r + h)$ and the base of the natural logarithms:

$$\varepsilon = e^{h\,D}\,, \qquad h\,D = \ln \varepsilon\,, \qquad D = \frac{1}{h} \ln \varepsilon\,.$$

If Δ is the forward difference operator, then

$$\Delta p(r) = p(r + h) - p(r)\,, \qquad \Delta = \varepsilon - 1\,, \qquad \varepsilon = 1 + \Delta$$

and

$$D = \frac{1}{h} \ln (1 + \Delta)\,,$$

expanding the logarithmic term

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} \Delta^{n+1}\,, \\ D &= \frac{1}{h}\left(\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \cdots\right), \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

then

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{1}{h}\left(\Delta\psi - \frac{1}{2}\Delta^2\psi + \frac{1}{3}\Delta^3\psi - \cdots\right). \tag{61}$$

Near the end of a tabulation, the corresponding formula in terns of the backward difference operator $\nabla p(r) = p(r) - p\,(r - h)$ may be used:

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \nabla^{n+1}\,, \\ \tau_{\theta\theta} &= \frac{1}{h}\left(\nabla\psi + \frac{1}{2}\nabla^2\psi + \frac{1}{3}\nabla^3\psi + \cdots\right). \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

To determine the error introduced by approximating the general differential equation to obtain the stress field given by equations (29)—(31), applications of the formulas derived earlier will now be made.

5. Application 1. Consider the hollow cylinder of Fig. 1
This corresponds to the first example given by *Trostel*, who assumes the following laws for variation of physical properties:

$$\lambda(T) = \lambda_0 - \lambda_1\, T\,, \tag{70}$$

$$\alpha(T) = \alpha_0 + \alpha_1 T\,, \tag{71}$$

$$E(T) = E_0 - E_1 T^2 \tag{72}$$

and gives the following constants for mild steel

$\lambda_0 = 0.12$	[cal/cm² — sec — (°C/cm)],
$\lambda_1 = 0.00007$	[cal/cm² — sec — (°C²/cm)],
$\alpha_0 = 1.2 \times 10^{-5}$	[°C⁻¹],
$\alpha_1 = 0.001 \times 10^{-5}$	[°C⁻²],
$E_0 = 2.1 \times 10^6$	[kg/cm²],
$E_1 = 3.2$	[kg/cm² — °C²].

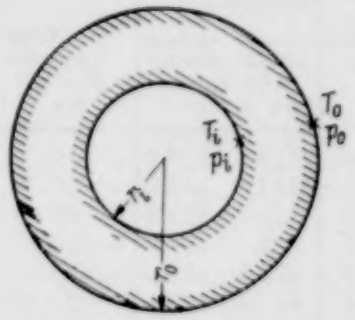


Fig. 1. Geometry of the hollow cylinder.

$\nu = 1/4$
$r_i = 12$ cm $\quad T_i = 350$°C $\quad p_i = 0$
$r_0 = 18$ cm $\quad T_0 = 280$°C $\quad p_0 = 0$

a) Temperature field. The steady state temperature field is easily established, on the assumption of law (70), to be

$$T(r) = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \left\{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - T_0\right)^2 - \left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - T_0\right)^2 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - T_i\right)^2 \frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)}\right]\right\}^{1/2}. \tag{73}$$

For the case of constant thermal conductivity $\lambda_1 \to 0$ and equation (73) reduces to

$$T(r) = T_0 - (T_0 - T_i)\left[\frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)}\right]. \tag{74}$$

As pointed out by *Trostel*, the temperature fields given by equation (73) and (74) differ only slightly for the example under consideration. This may be seen by inspection of the first two columns in Table 1. *Trostel* capitalized on this fact to derive closed expressions for the integrals $\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r)$, and $\varphi_3(r)$ (it should be noted that the final expressions listed by *Trostel* are not complete). Actually with the exception of $\varphi_2(r)$ which is indefinite, the integrals are about as easily solved by some form of numerical quadrature.

b) Stress field. Using the temperature function (74) and the defining equation (19), $\varphi_2(r)$ can be expressed as

$$\varphi_2(r) = -\frac{\alpha_0 E(T)(T_0 - T_i)}{2\ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)}\left\{\left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} T_0\right) - \frac{\frac{\alpha_1}{\alpha_0}(T_0 - T_i)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)}\left[\ln\frac{r}{r_0} - \frac{1}{2}\right]\right\}. \tag{75}$$

The stress function was determined numerically by use of the simplified equations (64) and (65) for the case of $\nu = 1/4$ (*Trostel* uses $\nu = 1/2$ in his solution). Equation (14) was then used to determine the radial component τ_{rr} of the stress vector. Equations (15), (67), and (68) were employed to calculate the rotational component of the stress vector $\tau_{\theta\theta}$. Numerical details are contained in Appendix 1. The results are entered in columns four and five of Table 1. In the solution, the space increment was taken as $h = 0.10$ and 60 steps used to complete the calculation.

In using the approximate solutions, equations (29) and (30), the definite integrals $\varphi_1(r)$ and $\varphi_3(r)$ were solved by numerical quadrature and the expression (75) was employed for $\varphi_2(r)$. The results of this second calculation are entered in columns six and eight of Table 1. Deviations from the numerical results are given as a % error. Inspection of this error shows that the approximations consistently give a stress value which is about 1% too small in magnitude. This however is within the experimental error of the constants employed in equations (70)—(72).

Results assuming constant physical properties and using equations (33) and (34) are given in the last four columns of Table 1, with their corresponding error.

Table 1. *First Application*

$r_i = 12$ cm, $r_0 = 18$ cm, $T_i = 350°$ C, $T_0 = 280°$ C, $\nu = 1/4$, $p_i = p_0 = 0$

Radius r cm	Temperature, °C		Stress Field in kg/cm²									
			Numerically by eqns. 64 & 65		Approximations by eqns. 29 & 30				Constant property eqn. 34		Constant property, eqn. 33	
	constant conductivity Eqn. 74	variable conductivity Eqn. 73	τ_{rr}	$\tau_{\theta\theta}$	$\tau_{\theta\theta}$	% Error	τ_{rr}	% Error	$\tau_{\theta\theta}$	% Error	τ_{rr}	% Error
12.0	350.0	350.0	0	—1411.1	—1410.2	—0.1	0	—	—1333.1	—5.5	0	—
12.5	343.0	342.8	— 50.7	—1124.2	—1123.6	—0.1	— 50.0	—1.3	—1045.9	—7.0	— 46.7	— 7.9
13.0	336.2	335.9	— 86.7	— 852.3	— 850.9	—0.2	— 86.1	—0.7	— 789.2	—7.4	— 81.9	— 5.5
13.5	329.7	329.3	—110 3	— 595.8	— 592.5	—0.6	—110.0	—0.3	— 549.8	—7.7	—100.0	—10.0
14.0	323.4	323.0	—123.3	— 372.2	— 371.5	—0.2	—122.8	—0.3	— 343.6	—7.7	—113.8	— 8.7
14.5	317.3	316.9	—127.6	— 128.5	— 127.8	—0.4	—127.0	—0.5	— 118.1	—8.7	—118.8	— 6.9
15.0	311.5		—124.4	+ 81.8	+ 79.7	—2.6	—124.0	—0.4	+ 75.9	—8.9	—115.0	— 7.5
15.5	305.8	305.4	—114.8	+ 271.2	269.8	—0.5	—114.2	—0.5	257.8	—5.0	—104.9	— 8.6
16.0	300.3		— 99.7	+ 490.0	480.0	0	— 99.7	0	436.4	—7.6	— 92.5	— 7.3
16.5	295.0	294.7	— 80.2	+ 636.5	635.1	—0.2	— 80.0	—0.2	587.6	—7.8	— 73.5	— 8.3
17.0	289.9		— 56.6	+ 805.5	801.0	—0.6	— 55.9	—1.1	739.5	—8.2	— 51.2	— 9.5
17.5	284.4	284.3	— 29.8	+ 962.8	961.3	—0.2	— 29.5	—0.7	881.9	—8.4	— 27.8	— 6.7
18.0	280.0	280.0	0.0	+1087.1	1086.0	—0.1	0.0	0.0	1018.9	—6.5	0.0	0.0

6. Application 2. We now consider an example which will provide a more severe test of the approximate solutions derived in the first of my former paper [5]. Consider a composite body made up of two concentric, hollow cylinders, denoted as cylinder (1) and cylinder (2), as shown in Fig. 2. If the inner cylinder (1) is taken to be a carbon steel and the outer cylinder (2) a low alloy

steel, then the pertinent physical properties vary with temperature as shown in Figures 3, 4, and 5 in which the bracketed numbers identify the cylinders.

a) Temperature field. In general for the steady state case, we wish to solve the problem

$$\nabla(\lambda \nabla T) = 0\,, \tag{77}$$

where ∇^2 is the Laplacian operator subject to the/two-point boundary conditions

$$r = r_i\colon \quad T = T_i\,, \tag{78}$$

$$r = r_0\colon \quad T = T_0\,. \tag{79}$$

Expanding equation (77)

$$\nabla\lambda \cdot \nabla T + \lambda \nabla^2 T = 0$$

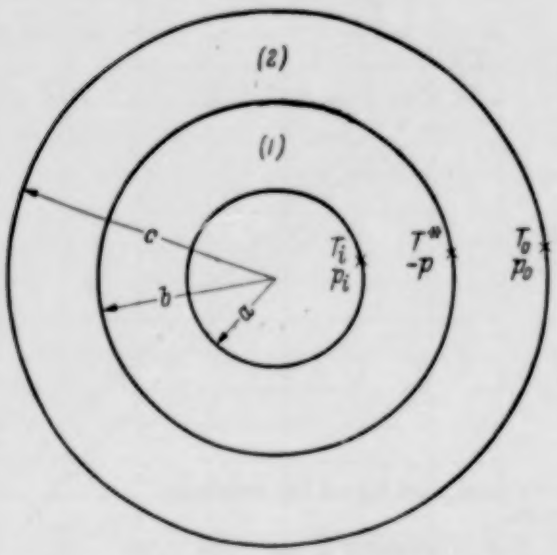


Fig. 2. Geometry of two concentric hollow cylinders.

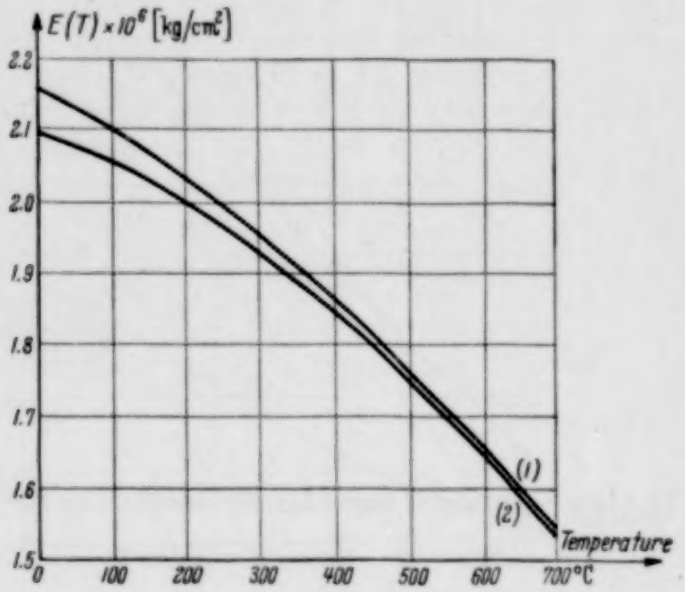


Fig. 3. Young's Modulus

$\nu(1) = \nu(2) = 1/4$

$\begin{cases} r_i^{(1)} = a = 12\text{ cm} & T_i^{(1)} = 0\,C^\circ & p_i = 0 \\ r_0^{(1)} = b = 16\text{ cm} & T_0^{(1)} = T^* & \end{cases}$

$\begin{cases} r_i^{(2)} = b = 16\text{ cm} & T_i^{(2)} = T^* & \\ r_0^{(2)} = c = 20\text{ cm} & T_0^{(2)} = 700^\circ\,C & p_0 = 0 \end{cases}$

which reduces in the case of axial and rotational symmetry to

$$\frac{d\lambda}{dr}\frac{dT}{dr} + \lambda\left(\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr}\right) = 0\,,$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,\lambda\frac{dT}{dr}\right) = 0\,,$$

$$r\,\lambda\frac{dT}{dr} = c_1\,,\ ^{1})$$

$$\frac{dT}{dr} = c_1\frac{1}{\lambda\,r}\,,$$

$$T = c_1\int\frac{dr}{\lambda\,r} + c_2\,, \tag{81}$$

[1] At this point one may wish to introduce an explicit function for the thermal conductivity and solve the problem as

$$\int \lambda\, dT = c_1 \ln r + c_2$$

however, the non-linear nature of the thermal conductivity in this specific example tends to make the algebra messy; hence, the iteration procedure developed above is employed.

from equation (78)

$$c_2 = T_i - c_1\left(\int \frac{dr}{\lambda r}\right)_{r=r_i}, \tag{82}$$

from equation (79)

$$T_0 = c_1\left(\int \frac{dr}{\lambda r}\right)_{r=r_0} + c_2$$

so that

$$c_1 = \frac{T_0 - T_i}{\int\limits_{r_i}^{r_0} \frac{dr}{\lambda r}}. \tag{83}$$

Introducing (82) and (83) into (81) we have

$$T = (T_0 - T_i)\frac{\int \frac{dr}{\lambda r}}{\int\limits_{r_i}^{r_0} \frac{dr}{\lambda r}} + T_i - (T_0 - T_i)\frac{\left(\int \frac{dr}{\lambda r}\right)_{r=r_i}}{\int\limits_{r_i}^{r_0} \frac{dr}{\lambda r}},$$

$$\frac{T - T_i}{T_0 - T_i} = \frac{\int\limits_{r_i}^{r} \frac{dr}{\lambda r}}{\int\limits_{r_i}^{r_0} \frac{dr}{\lambda r}}. \tag{84}$$

The last equation is immediately adopted to the composite body at hand by setting:

Cylinder 1	Cylinder 2
$r_i = a$	$r_i = b$
$r_0 = b$	$r_0 = c$
$T_i = T_i$	$T_0 = T^*$
$T_i = T^*$	$T_0 = T_0$

The desired temperature fields become
for cylinder 1

$$\frac{T^{(1)} - T_i}{T^* - T_i} = \frac{\int\limits_{a}^{r} \frac{dr}{\lambda^{(1)} r}}{\int\limits_{a}^{b} \frac{dr}{\lambda^{(1)} r}}, \tag{85}$$

for cylinder 2

$$\frac{T^{(2)} - T^*}{T_0 - T^*} = \frac{\int\limits_{b}^{r} \frac{dr}{\lambda^{(2)} r}}{\int\limits_{b}^{c} \frac{dr}{\lambda^{(2)} r}}. \tag{86}$$

The common temperature T^* is determined from the conditions

$$-\lambda^{(1)}(b)\left(\frac{dT^{(1)}}{dr}\right)_{r=b} = -\lambda^{(2)}(b)\left(\frac{dT^{(2)}}{dr}\right)_{r=b}$$

from which

$$T^* = T_i + (T_0 - T_i)\frac{\int_a^b \frac{dr}{\lambda^{(1)}r}}{\int_a^b \frac{dr}{\lambda^{(1)}r} + \int_b^c \frac{dr}{\lambda^{(2)}r}} \qquad (87)$$

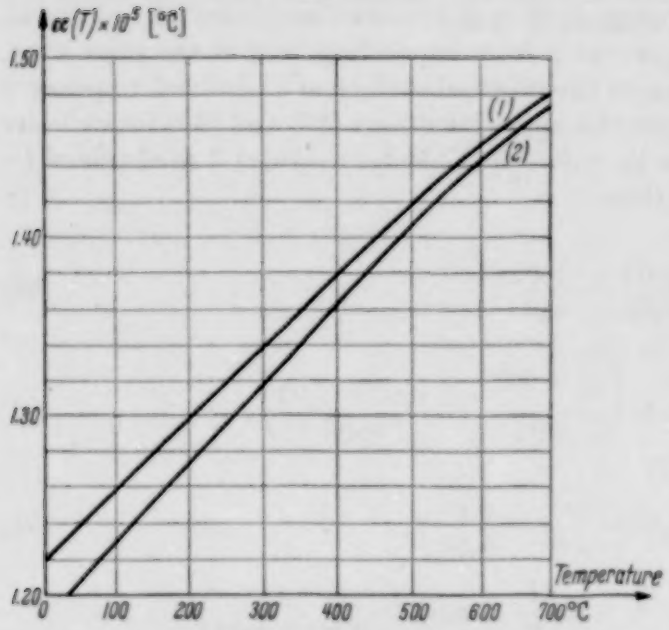


Fig. 4. Coefficient of Thermal Expansion

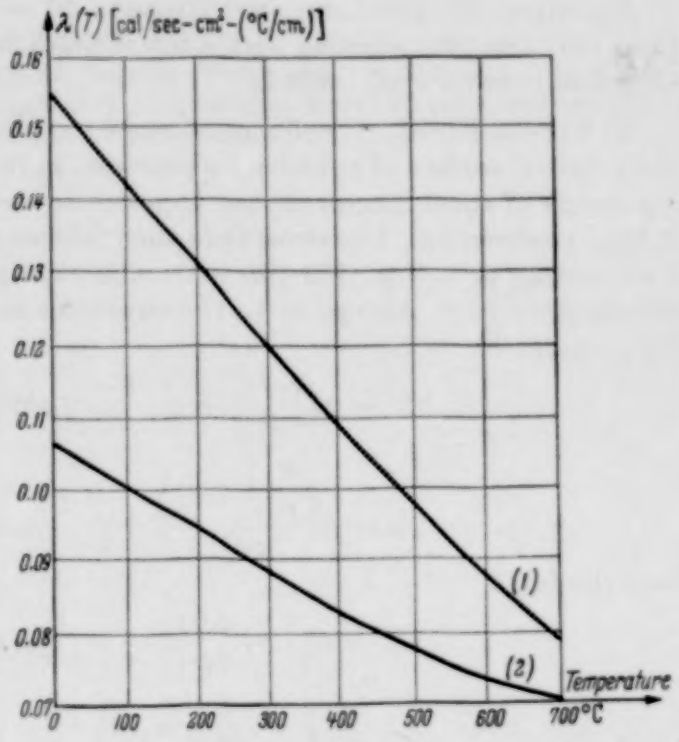


Fig. 5. Thermal Conductivity

Table 2. *Second Application*

$$\left(\nu = \frac{1}{4}\right)$$

Radius r cm	Temperature, °C (third iteration of eqn. 85, 86)	Stress Field in kg/cm² Numerically by eqns. 64 & 65		Approximations by eqn. 29 & 30				Constant properties, eqns. 33 & 34			
		τ_{rr}	$\tau_{\theta\theta}$	τ_{rr}	% Error	$\tau_{\theta\theta}$	% Error	τ_{rr}	% Error	$\tau_{\theta\theta}$	% Error
12.0	0	0	23.399	0	—	22.964	—1.9	0	—	20.709	—11.5
12.5	33.0	886.0	20.990	875.7	—1.1	20.491	—1.9	777.4	—12.2	18.444	—12.2
13.0	67.5	1611.2	18.535	1582.0	—1.8	18.232	—1.6	1443.0	—16.8	16.398	—11.5
13.5	102.4	2197.1	16.266	2148.1	—2.2	16.087	—1.1	1917.7	—17.2	14.529	—10.7
14.0	137.0	2661.5	14.274	2606.5	—2.2	14.132	—1.0	2353.5	—11.6	12.768	—10.5
14.5	173.2	3029.3	12.099	2968.7	—2.0	12.002	—0.8	2693.7	—11.0	11.176	—9.0
15.0	211.5	3299.0	10.247	3192.9	—2.3	10.153	—1.0	2947.9	—11.0	9.688	— 5.6
15.5	254.6	3493.8	9.188	3433.1	—1.8	9.202	0.1	3136.6	—10.0	8.311	— 9.5
16.0	295.2	3621.0	7.657	3621.0	0.0	7.632	—0.3	3288.1	— 9.0	7.021	— 8.3
16.0	295.2	3621.0	—11.345	3621.0	0.0	—11.322	—0.4	3288.1	— 9.0	— 7.709	—32.0
16.5	345.1	3218.3	—12.244	3170.2	—1.3	—12.229	—0.2	2967.2	— 8.1	— 9.186	—25.0
17.0	389.5	2720.1	—13.210	2689.0	—1.1	—13.196	—0.6	2538.4	— 6.8	—11.350	—14.1
17.5	435.2	2238.6	—14.176	2217.9	—1.0	—14.123	—1.0	2150.1	— 4.0	—12.024	—15.2
18.0	481.8	1769.0	—15.187	1740.9	—1.6	—14.946	—2.3	1743.2	— 1.5	—13.317	—12.3
18.5	531.7	1312.3	—15.875	1281.1	—2.4	—15.781	—1.0	1325.5	1.0	—14.551	— 8.3
19.0	584.4	881.6	—16.292	861.0	—2.2	—16.163	—1.3	872.9	— 0.8	—15.756	— 8.8
19.5	642.7	444.1	—16.975	440.7	—0.8	—16.782	—2.0	440.3	— 1.0	—16.884	— 0.4
20.0	700.0	0.0	—18.018	0.0	0.0	—17.860	—1.6	0.0	0.0	—17.967	— 0.1

The second law of the mean for an integral may be applied to equation (87) to obtain the initial estimate of T^*

$$T^* = T_i + (T_0 - T_i) \frac{\dfrac{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}{\bar{\lambda}^{(1)}}}{\dfrac{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}{\bar{\lambda}^{(1)}} + \dfrac{\ln\left(\dfrac{c}{b}\right)}{\bar{\lambda}^{(2)}}}. \tag{88}$$

Equation (88) gave an initial estimate $T^* = 300°$ C, and three subsequent iterations of equations (85) and (86), starting with a linear gradient, gave $T^* = 295.2$ °C, and the temperature field shown in column 2 of Table 2.

b) Stress Field. If cylinders 1 and 2 are disengaged, then it becomes necessary to impose on the external surface of cylinder 1 a pressure, p, to prevent it from expanding, and at the same time, a pressure of equal magnitude but opposite direction on the internal surface of cylinder 2 to prevent it from contracting. The stress field then follows from the approximations (29) and (30) for cylinder 1 by setting $p_0 = -p$. For this particular example $p_i = 0$. The field for cylinder 2 is obtained by setting $p_i = -p$. Also $p_0 = 0$. The equations are then
for cylinder 1

$$\tau_{rr}^{(1)} = p\left(\frac{\varphi_1(r)}{\varphi_1(b)}\right) + \frac{1}{1-\nu^{(1)}}\varphi_3(b)\left(\frac{\varphi_1(r)}{\varphi_1(b)} - \frac{\varphi_3(r)}{\varphi_3(b)}\right), \tag{89}$$

$$\tau_{\Theta\Theta}^{(1)} = p\left(\frac{\dfrac{E}{r^2} + \varphi_1(r)}{\varphi_1(b)}\right) + \frac{1}{1-\nu^{(1)}}\varphi_3(b)\left(\frac{\dfrac{E}{r^2} + \varphi_1(r)}{\varphi_1(b)} - \frac{\varphi_2(r) + \varphi_3(r)}{\varphi_3(b)}\right), \tag{90}$$

for cylinder 2

$$\tau_{rr}^{(2)} = p\left(1 - \frac{\varphi_1(r)}{\varphi_1(c)}\right) + \frac{1}{1-\nu^{(2)}}\varphi_3(c)\left(\frac{\varphi_1(r)}{\varphi_1(c)} - \frac{\varphi_3(r)}{\varphi_3(c)}\right), \tag{91}$$

$$\tau_{\Theta\Theta}^{(2)} = p\left(1 - \frac{\dfrac{E}{r^2} + \varphi_1(r)}{\varphi_1(c)}\right) + \frac{1}{1-\nu^{(2)}}\varphi_3(c)\left(\frac{\dfrac{E}{r^2} + \varphi_1(r)}{\varphi_1(c)} - \frac{\varphi_2(r) + \varphi_3(r)}{\varphi_3(c)}\right). \tag{92}$$

Since the temperature field in this example was established numerically, it is necessary to integrate the expression $\varphi_2(r)$, equation (19), in like manner. The second form of the indefinite integral is more convenient for this purpose. The integrand $r \int_{\Theta=0}^{\Theta=T(r)} \alpha(\Theta)\, d\Theta$ in the indefinite integral can be quite accurately represented by some form of polynomial approximation. In this particular example, the first four Gram polynomials of degree zero, one, two, and three, respectively, were employed.

The interfacial pressure p is arbitrary until the tolerance between the two cylinders is specified. Denoting this tolerance by Δu:

$$\Delta u = u^{(1)}(b) - u^{(2)}(b)$$

where the radial component of the displacement vector is given by equation (32). For this exemple $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 1/4$ so that the value of axial strain component, A_1, is immaterial. The expression for the tolerance is a function of the unknown pressure p as is seen on evaluating equations (91) and (92) at $r = b$

$$\frac{\Delta u}{b} = (1-\nu^2)\left(\frac{\tau_{\Theta\Theta}^{(1)}(b)}{E^{(1)}(b)} - \frac{\tau_{\Theta\Theta}^{(2)}(b)}{E^{(2)}(b)}\right) - \nu(1+\nu)\, p\left(\frac{1}{E^{(1)}(b)} - \frac{1}{E^{(2)}(b)}\right) + (1+\nu)\int_{\Theta=0}^{\Theta=T^*} (\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)})\, d\Theta\,. \tag{93}$$

For the case of constant physical properties we have

$$\frac{\Delta u}{b} = (1-\nu^2)\left(\frac{\tau_{\Theta\Theta}^{(1)}(b)}{E_0^{(1)}} - \frac{\tau_{\Theta\Theta}^{(2)}(b)}{E_0^{(2)}}\right) - \nu(1+\nu)\, p\left(\frac{1}{E_0^{(1)}} - \frac{1}{E_0^{(2)}}\right) + (1+\nu)(\alpha_0^{(1)} - \alpha_0^{(2)})\, T^*\,. \tag{94}$$

For this example, take $\Delta u = 0.10$ cm, then equation (93) gives $p = 3621$ kg/cm^2, while equation (94) gives $p = 3288$ kg/cm^2. The complete stress field as calculated numerically, by the approximate extensions of *Trostel*'s solutions, and by the equations for constant physical properties is given in

Table 2. The average error introduced by the approximations in this example is seen to be larger than in the first application, but still less than 3% which is within the experimental accuracy of data over this wide a range. Again the approximations give stress values which are slightly too small in magnitude.

7. Conclusions. The extensions of *Trostel*'s solutions derived in this paper may be employed tor general ν over wide conditions with a resulting error less than 3%, the stress values being too small in magnitude by this amount. The error decreases as the variation of physical properties of the media decreases or as $\nu \to 1/2$.

(Eingegangen am 6. Oktober 1958.)

Anschrift der Verfasser: Prof. Dr. Ing., Dr. Phil. *Milomir M. Stanišić*, West Lafayette, Indiana (USA), Purdue University, Division of Engineering Sciences; Graduate Student *R. M. McKinley*, West Lafayette, Indiana (USA) Purdue University, Chemical Engineering.

Zur Theorie der Rotationsschalen vom Standpunkt numerischer Rechnungen

Von E. Klingbeil

1. Einleitung. Die folgenden Ausführungen sind veranlaßt durch Überlegungen[1] darüber, wie sich statische Berechnungen von biegesteifen Rotationsschalen mit drehsymmetrischer Belastung auf elektronische Rechenautomaten programmieren lassen.

H. Reißner[2] behandelte speziell die Kugelschale. *E. Meißner* stellte erst für Rotationsschalen konstanter Wandstärke[3], später auch veränderlicher Wandstärke[4], zwei gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf, die sich zu einer Differentialgleichung vierter Ordnung zusammenfassen lassen. Für spezielle Schalenformen gelingt es ihm, die Differentialgleichung vierter Ordnung auf eine komplexe Differentialgleichung zweiter Ordnung zu reduzieren. *F. Tölke*[5] führte später unter Vernachlässigung sehr kleiner Terme in den *Meißner*schen Gleichungen das Problem auch für beliebige Schalenformen auf eine komplexe Differentialgleichung zweiter Ordnung zurück. Für praktische Berechnungen interessieren numerische Verfahren. Ein solches hat *W. Lohmann*[6] angegeben. Er führt die *Meißner*sche Differentialgleichung vierter Ordnung unter Vernachlässigung kleiner Terme auf eine komplexe *Riccati*sche Differentialgleichung erster Ordnung zurück. Nachdem diese auf numerischem Wege gelöst ist, werden die vernachlässigten Terme durch Iterationen wieder mit berücksichtigt. Einen neuen Weg beschritt *H. Münz*[7] mit Variationsrechnung. Auf dem Wege über die *Hamilton*sche Theorie der kanonischen Differentialgleichungen entstehen vier Differentialgleichungen erster Ordnung, die unmittelbar auf numerischem Wege gelöst werden können.

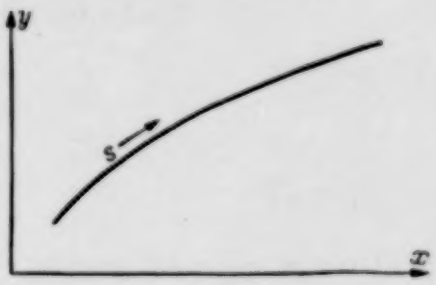


Abb. 1. Koordinaten

Eine Rotationsschale ist geometrisch durch ihren Meridian bestimmt. Die Form des Meridians läßt sich auf verschiedene Weise durch Koordinaten festlegen. *W. Lohmann* und *H. Münz* verwendeten rechtwinklige Koordinaten x, y. Für eine steile Schale (siehe Abb. 1) führen sie die Ordinate y, die gleichzeitig Breitenkreishalbmesser ist, als Funktion der unabhängigen Veränderlichen x ein. Für die flache Schale dagegen benutzt *Münz* den Breitenkreishalbmesser y als unabhängige Veränderliche, um Singularitäten der Ableitungen zu vermeiden. So braucht man für eine beliebig gekrümmte Rotationsschale mindestens zwei verschiedene Verfahren, d. h. zwei verschiedene Systeme von Differentialgleichungen. *F. Wirthwein*[8] hat in einer Dissertation einen mehrfach gekrümmten Flaschenboden behandelt. Er benutzt vier getrennte Verfahren für Kugelschale, steile Schale, flache Schale, Zylinderschale. Dadurch werden seine Berechnungen sehr umfangreich.

Zur Programmierung des Schalenproblems für elektronische Rechenautomaten ist es aber zweckmäßig, die einzelnen Bereiche der Schale mit ein und demselben Verfahren zu behandeln. Man braucht dann nur ein einziges Programm und spart auf diese Weise an Speicherzellen.

Diese Vereinfachung wird durch die Einführung der Meridianbogenlänge s als unabhängige Veränderliche gewährleistet. Die Funktion $y(s)$ ist überall eindeutig und differentiierbar. Die Unterscheidung zwischen flacher Schale und steiler Schale entfällt damit. Außer *F. Tölke*, der bereits mit der Bogenlänge gearbeitet hat, bedienen sich alle unten angeführten Autoren anderer Koordinaten. Ich lege zunächst dar, wie sich die Gleichungen der genannten Verfahren schreiben, wenn die Meridianbogenlänge als unabhängige Veränderliche verwendet wird. Dann sage ich noch einiges über die Lösungsmethoden, überlasse jedoch dem Leser, für praktische Berechnungen oder Programmierungen unter den Verfahren auszuwählen.

[1] Den Herren Prof. Dr. *A. Walther* (Darmstadt), Dozent Dr.-Ing. habil. *W. Lohmann* (Aachen) und Dr. *H. Bottenbruch* (Darmstadt) danke ich für Anregungen und Aussprachen.

[2] *H. Reißner*, Spannungen in Kugelschalen, Müller-Breslau-Festschrift, S. 181. Leipzig 1912.

[3] *E. Meißner*, Phys. Zs. 14 (1913) S. 343.

[4] *E. Meißner*, Vjschr. Naturforsch. Ges. Zürich, 6 (1915) S. 23.

[5] *F. Tölke*, Ing.-Archiv, 9 (1938) S. 282.

[6] *W. Lohmann*, Ing.-Arch. 6 (1935) S. 338.

[7] *H. Münz*, Ing.-Arch., 19 (1951) S. 103 und 255.

[8] *F. Wirthwein*, Elastizitätstheoretische Untersuchung eines mehrfach gekrümmten Flaschenbodens. Dissertation TH Aachen 1955.

A. Mechanik der biegesteifen Rotationsschale im Koordinatensystem (s, y)

2. Voraussetzungen. Wir setzen folgende Annahmen fest:

a) Es gelten die Voraussetzungen der einfachen Balkenstatik.

b) Es wird angenommen, daß die Schalennormale auch nach der Verformung noch senkrecht auf der Schale steht, d. h. daß keine Querkraftverformungen auftreten.

c) Die Wandstärke der Schale ist klein gegen die Krümmungsradien. Daher reicht es aus, die geometrischen Beziehungen, die Verformungen und Verschiebungen am Element der Schalenmittelfläche zu betrachten.

d) Es gilt das *Hooke*sche Gesetz.

3. Definitionen. Wir definieren folgende Größen:

a) Geometrische Größen (Abb. 2)

s = Meridianbogenlänge,
y = Halbmesser des Breitenkreises,
r_1 = Hauptkrümmungshalbmesser der Schale in Meridianrichtung,
r_2 = Hauptkrümmungshalbmesser der Schale in Breitenkreisrichtung,
φ = Winkel zwischen der Schalennormalen und der Rotationsachse.

Die Hilfsgrößen φ, r_1, r_2 lassen sich durch folgende Beziehungen in y und s ausdrücken (s. Abb. 2).

$$\cos\varphi = y' , \qquad \sin\varphi = \sqrt{1 - y'^2} ,$$

$$r_1 = -\frac{\sqrt{1 - y'^2}}{y''} , \qquad r_2 = \frac{y}{\sqrt{1 - y'^2}} ,$$

wobei Striche Ableitungen nach s bedeuten.

b) Schnittgrößen:

N_ϑ = Normalkraft je Längeneinheit eines Schnittes ϑ = konst., (mit ϑ als Breitenkreiswinkel); positiv, wenn sie die Schale auf Zug beansprucht,

N_s = Normalkraft je Längeneinheit eines Schnittes s = konst., positiv, wenn sie die Schale auf Zug beansprucht,

Q = Querkraft je Längeneinheit eines Schnittes s = konst. (Vorzeichen nach Abb. 2),

M_ϑ = Biegemoment je Längeneinheit eines Schnittes ϑ = konst., positiv, wenn es die Innenfläche der Schale auf Zug beansprucht,

M_s = Biegemoment je Längeneinheit eines Schnittes s = konst., positiv, wenn es beim Umlauf mit s im Uhrzeigersinn Zugbeanspruchung in der Schaleninnenfläche erzeugt.

c) Verschiebungen und Verformungen:

v = Verschiebung in s-Richtung (positiv in s-Richtung),

w = Verschiebung senkrecht zur s-Richtung (umläuft man mit s die Schale im Uhrzeigersinn, so zeigt das positive w aus der Schale heraus),

ε_s = Meridiandehnung,

ε_ϑ = Breitenkreisdehnung,

χ = Verdrehung der Meridiantangente (positiv bei Abnahme des Winkels φ),

$\varkappa_s$ = Abnahme der Meridiankrümmung,

$\varkappa_\vartheta$ = Abnahme der Breitenkreiskrümmung.

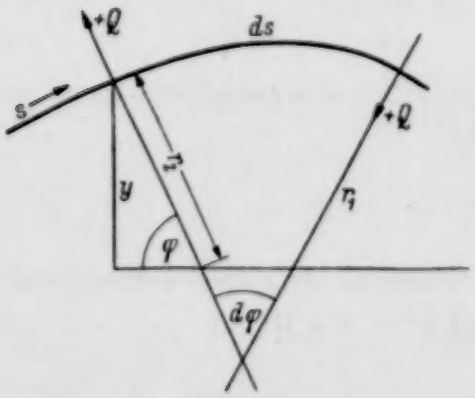


Abb. 2. Bezeichnungen

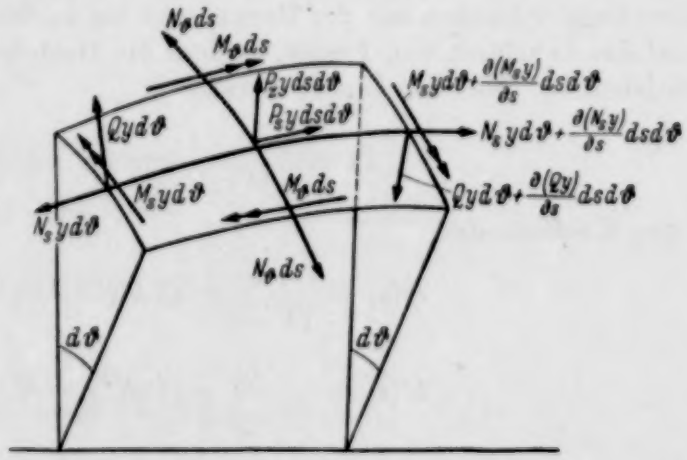


Abb. 3. Gleichgewicht am Schalenelement

4. Gleichgewichtsbedingungen. Aus Abb. 3 lassen sich leicht die Gleichgewichtsbedingungen ableiten. Man betrachtet das Gleichgewicht der Kräfte in Richtung der Meridiantangente und in Richtung der Schalennormalen, außerdem das Momentengleichgewicht um eine Breitenkreistangente. Nach Eliminieren der Hilfsgrößen φ, r_1, r_2 bekommt man die drei Gleichgewichtsbedingungen in der Form

$$\left.\begin{aligned} (N_s y)' - N_\vartheta y' + Q\frac{y y''}{\sqrt{1-y'^2}} + p_s y = 0\,, \\ (Q y)' + N_\vartheta\sqrt{1-y'^2} - N_s\frac{y y''}{\sqrt{1-y'^2}} - p_z y = 0\,, \\ (M_s y)' - M_\vartheta y' - Q y = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

5. Das Elastizitätsgesetz. Nach dem *Hooke*schen Gesetz ergibt sich ohne Berücksichtigung der Querkraftverformungen

$$\left.\begin{aligned} N_s &= D(\varepsilon_s + \nu\varepsilon_\vartheta), & M_s &= K(\varkappa_s + \nu\varkappa_\vartheta), \\ N_\vartheta &= D(\varepsilon_\vartheta + \nu\varepsilon_s), & M_\vartheta &= K(\varkappa_\vartheta + \nu\varkappa_s) \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

mit h = Schalenstärke und

$$D = \frac{E h}{1-\nu^2}\,, \qquad K = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}\,.$$

6. Die Formänderungsbedingungen. Die Herleitung dieser Gleichungen sei hier nicht angegeben, sondern hierfür sowie für das bessere Verständnis der beiden Ziffern 4 und 5 verweise ich auf das Lehrbuch von *Flügge*[1], in dem sich ähnliche Herleitungen befinden:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{w}{r_1} + v'\,, & \varkappa_s &= \chi'\,, \\ \varepsilon_\vartheta &= \frac{v y' + w\sqrt{1-y'^2}}{y}\,, & \varkappa_\vartheta &= \chi\frac{y'}{y}\,, \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

$$\chi = w' - \frac{v}{r_1}\,.$$

B. Die Differentialgleichungen der biegesteifen Rotationsschale im Koordinatensystem (s, y)

7. Die *Meißner*schen Differentialgleichungen mit der Bogenlänge als unabhängige Veränderliche. Entsprechend dem Wege von *Meißner* führt man die Variablen

$$U = \chi\,, \qquad V = \frac{Q y}{h^2\sqrt{1-y'^2}}$$

ein. Dann ergeben sich durch geschickte Umformungen aus den Gleichgewichtsbedingungen (I), dem Elastizitätsgesetz (II) und den Formänderungsbedingungen (III) die zwei *Meißner*schen Differentialgleichungen mit der Bogenlänge als unabhängige Veränderliche. Auch hierbei verweise ich auf das Lehrbuch von *Flügge*, in dem die Herleitung, allerdings in anderen Koordinaten, kurz beschrieben ist. Mit dem Linearoperator L

$$L(\cdot\cdot) = \frac{1}{h^2\sqrt{1-y'^2}}\,[h^3 y\,(\cdot\cdot)']' - \frac{h y'^2}{y\sqrt{1-y'^2}}\,(\cdot\cdot)$$

und den Koeffizienten

$$\Theta(s) = \frac{\nu}{\sqrt{1-y'^2}}\,(3h'y' + h y'')\,,$$

$$\Omega(s) = \frac{1}{\sqrt{1-y'^2}}\,[2(h''y + h' y') - \nu(h y'' - h' y')]$$

[1] *W. Flügge*, Statik und Dynamik der Schalen, 2. Auflage. Berlin 1957.

ergeben sich die Differentialgleichungen

$$L(U) + \Theta\, U = \frac{12\,(1-\nu^2)}{E}\, V\,,$$

$$L(V) + \Omega\, V = -\,E\, U + \Phi\,.$$

Das Belastungsglied Φ hat die Form

$$\Phi = \frac{y}{h\sqrt{1-y'^2}}\left[\left(H - \nu\frac{F}{y\sqrt{1-y'^2}}\right)' + \left(\frac{y'}{y} - \frac{h'}{h}\right)\left(H - \nu\frac{F}{y\sqrt{1-y'^2}}\right) + \frac{y'}{y}\left(\nu H - \frac{F}{y\sqrt{1-y'^2}}\right)\right]$$

mit

$$H(s) = \frac{F\,y''}{(\sqrt{1-y'^2})^3} + \frac{P_x\,y}{\sqrt{1-y'^2}}\,.$$

Darin bedeutet F das Integral

$$F(s) = \int_{s_0}^{s} p_x\, y\, y'\, ds - \int_{s_0}^{s} p_z\, y\sqrt{1-y'^2}\; ds\,.$$

In Anlehnung an die Arbeit von *Lohmann*[1] vereinfacht sich das Belastungsglied Φ im Falle des konstanten Innendrucks p zu

$$\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{1-y'^2}}\,(\varphi' + \psi)$$

mit

$$\varphi(s) = \frac{Z\,y}{2\,\pi\,h}\left(\frac{y''}{(\sqrt{1-y'^2})^3} - \nu\,\frac{1}{y\sqrt{1-y'^2}}\right) + p\,\frac{y^2}{h\sqrt{1-y'^2}}\,,$$

$$\psi(s) = \frac{Z\,y'}{2\,\pi\,h}\left(\frac{\nu\,y''}{(\sqrt{1-y'^2})^3} - \frac{1}{y\sqrt{1-y'^2}}\right) + p\,\frac{\nu\,y\,y'}{h\sqrt{1-y'^2}}\,,$$

$$Z(s) = p\,\pi\,(y^2 - y_0^2)\,.$$

8. Die Differentialgleichung von *Tölke*. Wie in Ziff. 1 erwähnt, hat *F. Tölke* in seiner Abhandlung bereits in folgender Weise mit der Bogenlänge gearbeitet:

Führt man in den *Meißner*schen Gleichungen mit der Bogenlänge als unabhängige Veränderliche die Transformation

$$U = \frac{\sqrt{12\,(1-\nu^2)}}{E\,h^2}\sqrt{\frac{h}{y}}\,\eta\,, \qquad V = \frac{1}{h^2}\sqrt{\frac{h}{y}}\,\zeta$$

aus, und schreibt man das Belastungsglied um mit

$$\varphi' + \psi = -\,\tau\,\frac{y}{h}\,,$$

so entstehen mit den Koeffizienten

$$\alpha(s) = \frac{3}{4}\left(\frac{y'}{y}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{y''}{y} + \frac{3}{4}\left(\frac{h'}{h}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\,\nu\right)\frac{y'}{y}\,\frac{h'}{h} + \frac{1}{2}\,\frac{h''}{h}\,,$$

$$\alpha'(s) = -\,\nu\,\frac{y''}{y} + (1-\nu)\,\frac{y'}{y}\,\frac{h'}{h} + \frac{h''}{h}\,,$$

$$\beta(s) = \frac{\sqrt{12\,(1-\nu^2)}}{h\,y}\sqrt{1-y'^2}$$

unter Vernachlässigung von α' die Differentialgleichungen von *Tölke*

$$\eta'' - \alpha\,\eta - \beta\,\zeta = 0\,,$$

$$\zeta'' - \alpha\,\zeta + \beta\,\eta = -\,\tau\sqrt{\frac{y}{h}}\,.$$

Sie lassen sich komplex zusammenfassen:

$$X'' + (i\,\beta - \alpha)\,X = \tau\sqrt{\frac{y}{h}}\,.$$

[1] Siehe Fußnote 6 von Seite 242.

Kennt man die Lösungen für X

$$X_{(1)} = X_1 + i\,X_2\,, \quad X_{(2)} = X_3 + i\,X_4\,, \quad X_{(p)} = X_{p_1} + i\,X_{p_2}\,,$$

so ergeben sich die allgemeinen Lösungen für ζ und η zu

$$\zeta = -X_{p_1} - K_1 X_1 + K_2 X_2 - K_3 X_3 + K_4 X_4\,,$$
$$\eta = +X_{p_2} + K_2 X_1 + K_1 X_2 + K_4 X_3 + K_3 X_4\,.$$

9. Die *Münz*schen Schalengleichungen im Koordinatensystem (s, y). a) Das Variationsproblem. Der folgende Weg findet sich in anderen Koordinaten ausführlicher bei *H. Münz*. Die potentielle Energie der belasteten Schale

$$V = 2\pi \int_{s_0}^{s} \left[\frac{1}{2}\,(N_s\,\varepsilon_s + N_\vartheta\,\varepsilon_\vartheta + M_s\,\varkappa_s + M_\vartheta\,\varkappa_\vartheta) - (p_s\,v + p_z\,w)\right] y\,ds$$

muß nach dem bekannten Satz der Mechanik ein Minimum sein:

$$\delta V = 0\,.$$

Diese Forderung steht in Analogie zu dem *Hamilton*schen Prinzip der Dynamik:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = 0\,.$$

Daher läßt sich die *Hamilton*sche Theorie anwenden.

Jetzt wird der Integrand L mit Hilfe des Elastizitätsgesetzes (II) und der Formänderungsbedingungen (III) durch v, w, χ und deren Ableitungen v', w', χ' ausgedrückt. Da v, w, χ nicht voneinander unabhängig sind, muß über ihre Verträglichkeitsbedingung ein „*Lagrange*-Faktor" λ eingeführt werden:

$$L = \frac{y}{2}\left\{D\left[\left(v' - \frac{w\,y''}{\sqrt{1-y'^2}}\right)^2 + 2\,\nu\left(v' - \frac{w\,y''}{\sqrt{1-y'^2}}\right)\left(\frac{v\,y' + w\sqrt{1-y'^2}}{y}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{v\,y' + w\sqrt{1-y'^2}}{y}\right)^2\right] + K\left[\chi'^2 + 2\,\nu\,\chi\,\chi'\frac{y'}{y} + \chi^2\left(\frac{y'}{y}\right)^2\right]\right\}$$
$$+ \lambda\,y\left(w' + \frac{v\,y''}{\sqrt{1-y'^2}} - \chi\right) - y\,(p_s\,v + p_z\,w)\,.$$

Mit den Impulsen

$$p_v = \frac{\partial L}{\partial v'} = D\left[y\left(v' - \frac{w\,y''}{\sqrt{1-y'^2}}\right) + \nu\,(v\,y' + w\sqrt{1-y'^2})\right] = y\,N_s\,,$$
$$p_w = \frac{\partial L}{\partial w'} = \lambda\,y \qquad\qquad = -y\,Q\,,$$
$$p_\chi = \frac{\partial L}{\partial \chi'} = K\,(y\,\chi' + \nu\,y'\,\chi) \qquad = y\,M_s$$

entsteht aus der Formel

$$H\,(p_v, p_w, p_\chi, v, w, \chi) = p_v\,v' + p_w\,w' + p_\chi\,\chi' - L\,(v', w', \chi', v, w, \chi, \lambda)$$

die *Hamilton*sche Funktion

$$H = -p_w\frac{v\,y''}{\sqrt{1-y'^2}} + p_v\frac{w\,y''}{\sqrt{1-y'^2}} + p_w\,\chi$$
$$+ \frac{1}{2\,y}\left\{D\left[\left(\frac{P_v}{D}\right)^2 - 2\,\nu\,\frac{P_v}{D}\,(v\,y' + w\sqrt{1-y'^2}) - (1-\nu^2)\,(v\,y' + w\sqrt{1-y'^2})^2\right]\right.$$
$$\left. + K\left[\left(\frac{P_\chi}{K}\right)^2 - 2\,\nu\,\frac{P_\chi}{K}\,\chi\,y' - (1-\nu^2)\,\chi^2\,y'^2\right]\right\} + y\,(p_s\,v + p_z\,w)\,.$$

Nach der Vorschrift

$$p_v' = -\frac{\partial H}{\partial v}\,, \qquad v' = \frac{\partial H}{\partial p_v}\,,$$
$$p_w' = -\frac{\partial H}{\partial w}\,, \qquad w' = \frac{\partial H}{\partial p_w}\,,$$
$$p_\chi' = -\frac{\partial H}{\partial \chi}\,, \qquad \chi' = \frac{\partial H}{\partial p_\chi}$$

ergeben sich die kanonischen Differentialgleichungen

$$p_v' - \nu\, p_v \frac{y'}{y} = p_w \frac{y''}{\sqrt{1-y'^2}} + D(1-\nu^2)\left(v\,y' + w\sqrt{1-y'^2}\right)\frac{y'}{y} - p_s\, y\,,$$

$$p_w' - \nu\, p_v \frac{\sqrt{1-y'^2}}{y} = -\,p_v \frac{y''}{\sqrt{1-y'^2}} + D(1-\nu^2)\left(v\,y' + w\sqrt{1-y'^2}\right)\frac{\sqrt{1-y'^2}}{y} - p_s\, y\,,$$

$$p_\chi' - \nu\, p_\chi \frac{y'}{y} = -\,p_w + K(1-\nu^2)\,\chi\,\frac{y'^2}{y}\,,$$

$$v' + \nu\, v\frac{y'}{y} = w\left(\frac{y''}{\sqrt{1-y'^2}} - \nu\frac{\sqrt{1-y'^2}}{y}\right) + \frac{p_v}{D\,y}\,,$$

$$w' = -\,v\frac{y''}{\sqrt{1-y'^2}} + \chi\,,$$

$$\chi' + \nu\,\chi\frac{y'}{y} = \frac{p_\chi}{K\,y}\,.$$

b) Ein bekanntes Integral. Durch Eliminieren von N_ϑ aus den beiden ersten Gleichgewichtsbedingungen entsteht ein unmittelbar quadrierbares Integral, das weiter oben schon auftrat und mit F bezeichnet wurde:

$$\left(N_s\, y\sqrt{1-y'^2} + Q\,y\,y'\right)' = p_s\, y\,y' - p_s\, y\sqrt{1-y'^2}$$

oder

$$\left(p_v\sqrt{1-y'^2} - p_w\,y'\right)' = p_s\, y\,y' - p_s\, y\sqrt{1-y'^2}$$

Mit der „erzeugenden Funktion"

$$V = \left(p_v\sqrt{1-y'^2} - p_w\,y'\right)q_1 + \left(p_v\,y' + p_w\sqrt{1-y'^2}\right)q_2 + p_\chi\, q_3$$

entsteht eine kanonische Transformation, mit deren Hilfe man die Kenntnis des Integrals ausnutzen kann:

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_v\sqrt{1-y'^2} - p_w\,y'\,, \qquad v = \frac{\partial V}{\partial p_v} = q_1\sqrt{1-y'^2} + q_2\,y'\,,$$

$$p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_v\,y' + p_w\sqrt{1-y'^2}\,, \qquad w = \frac{\partial V}{\partial p_w} = q_2\sqrt{1-y'^2} - q_1\,y'\,,$$

$$p_3 = \frac{\partial V}{\partial q_3} = p_\chi\,, \qquad \chi = \frac{\partial V}{\partial p_\chi} = q_3\,.$$

Mit den Abkürzungen

$$K_1 = p_s\sqrt{1-y'^2} - p_s\,y'\,, \qquad K_2 = p_s\,y' + p_z\sqrt{1-y'^2}$$

ergibt sich daraus eine neue *Hamilton*sche Funktion

$$H_1 = H - \frac{\partial V}{\partial s} = q_3\left(p_2\sqrt{1-y'^2} - p_1\,y'\right) + \frac{1}{2\,y}\left\{D\left[\left(\frac{p_1\sqrt{1-y'^2} + p_2\,y'}{D}\right)^2 - 2\,\nu\,q_2\frac{p_1\sqrt{1-y'^2} + p_2\,y'}{D} - (1-\nu^2)\,q_2^2\right] + K\left[\left(\frac{p_3}{K}\right)^2 - 2\,\nu\,q_3\frac{p_3}{K}\,y' - (1-\nu^2)\,y'^2\,q_3^2\right]\right\} + y\,(K_1\,q_1 + K_2\,q_2)\,.$$

Hieraus entstehen wieder sechs kanonische Differentialgleichungen. Da zwei sofort zu integrieren sind, führt das Problem jetzt nur noch auf ein System von vier gekoppelten Differentialgleichungen.

Hat man also die erste kanonische Gleichung

$$p_1' = -\,y\,K_1$$

integriert, so ist jetzt das System von vier Differentialgleichungen zu lösen:

$$p_2' - \nu\, p_2\frac{y'}{y} = \nu\, p_1\frac{\sqrt{1-y'^2}}{y} + (1-\nu^2)\,D\frac{q_2}{y} - y\,K_2\,,$$

$$p_3' - \nu\, p_3\frac{y'}{y} = -\,p_2\sqrt{1-y'^2} + p_1\,y' + (1-\nu^2)\,K\,\frac{y'^2}{y}\,q_3\,,$$

$$q_2' + \nu\, q_2\frac{y'}{y} = q_3\sqrt{1-y'^2} + \frac{p_1\sqrt{1-y'^2} + p_2\,y'}{D}\,\frac{y'}{y}\,,$$

$$q_3' + \nu\, q_3\frac{y'}{y} = \frac{1}{K\,y}\,p_3\,.$$

Die letzte kanonische Differentialgleichung läßt sich wieder einfach integrieren. Sie lautet

$$q_1' = \frac{p_1\sqrt{1-y'^2}+p_2\,y'}{D}\,\frac{\sqrt{1-y'^2}}{y} - \nu\,q_2\,\frac{\sqrt{1-y'^2}}{y} - y'\,q_3\,.$$

c) Dimensionslose Größen. Mit einer mittleren Wandstärke h_0 und einem mittleren Breitenkreishalbmesser y_0 der Schale führt man dimensionslose Größen ein

$$\zeta = \frac{s}{y_0}\,, \qquad \varrho = \frac{y}{y_0}\,, \qquad \eta = \frac{h}{h_0}\,, \qquad \lambda = \frac{h_0}{y_0}\,.$$

Jetzt bedeuten Striche Differentiationen nach ζ. Wählt man die neuen Veränderlichen P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3 und verwendet die erzeugende Funktion

$$V = \frac{\sqrt[4]{12\,(1-\nu^2)}}{E\,h_0^3\,y_0}\left[y_0\,p_1\,Q_1 + \frac{y_0}{\eta}\,p_2\,Q_2 + \frac{1}{\eta}\,p_3\,Q_3\right],$$

so ergibt sich nach der Vorschrift

$$P_K = \frac{\partial V}{\partial Q_K}\,, \qquad \frac{1}{E\,h_0^3\,y_0}\,q_K = \frac{\partial V}{\partial p_K}$$

eine weitere kanonische Transformation

$$p_1 = \frac{E\,h_0^3}{\sqrt[4]{12\,(1-\nu^2)}}\,P_1\,, \qquad q_1 = \sqrt[4]{12\,(1-\nu^2)}\;y_0\,Q_1\,,$$

$$p_2 = \frac{E\,h_0^3}{\sqrt[4]{12\,(1-\nu^2)}}\,\eta\,P_2\,, \qquad q_2 = \sqrt[4]{12\,(1-\nu^2)}\;\frac{y_0}{\eta}\,Q_2\,,$$

$$p_3 = \frac{E\,h_0^3}{\sqrt[4]{12\,(1-\nu^2)}}\,\eta\,y_0\,P_3\,, \qquad q_3 = \sqrt[4]{12\,(1-\nu^2)}\;\frac{1}{\eta}\,Q_3\,.$$

Hieraus erhält man durch Transformation von H_1 die neue *Hamilton*sche Funktion

$$\begin{aligned} H_2 = \frac{H_1}{E\,h_0^2} - \frac{\partial V}{\partial \zeta} &= \frac{1}{\eta}\,Q_3\left(P_2\,\eta\sqrt{1-\varrho'^2} - P_1\,\varrho'\right) \\ &+ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\nu^2}{12}}\,\lambda\,\frac{1}{\varrho\,\eta}\left(P_1\sqrt{1-\varrho'^2} + P_2\,\eta\,\varrho'\right)^2 - \frac{\nu}{\varrho\,\eta}\,Q_2\left(P_1\sqrt{1-\varrho'^2} + P_2\,\eta\,\varrho'\right) \\ &- \frac{\sqrt{12\,(1-\nu^2)}}{2\,\lambda}\,\frac{1}{\varrho\,\eta}\,Q_2^2 + \frac{\sqrt{12\,(1-\nu^2)}}{2\,\lambda}\,\frac{1}{\varrho\,\eta}\,P_3^2 - \nu\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,P_3\,Q_3 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\nu^2}{12}}\,\lambda\,\frac{\varrho'^2}{\varrho}\,\eta\,Q_3^2 \\ &+ \frac{\sqrt[4]{12\,(1-\nu^2)}}{E\,\lambda^2}\,\varrho\left(K_1\,Q_1 + K_2\,\frac{1}{\eta}\,Q_2\right) + \frac{\eta'}{\eta}\left(P_2\,Q_2 + P_3\,Q_3\right). \end{aligned}$$

Man errechnet daraus auf bekannte Weise wieder sechs kanonische Differentialgleichungen. Zwei davon sind direkt zu integrieren. Eine sofort, die andere nach Auflösen des verbleibenden Systems von vier Differentialgleichungen. Die direkt zu integrierenden Gleichungen lauten

$$P_1' = -\frac{\sqrt[4]{12\,(1-\nu^2)}}{E\,\lambda^2}\,\varrho\,K_1\,,$$

$$Q_1' = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{12}}\,\lambda\,\frac{\sqrt{1-\varrho'^2}}{\eta\,\varrho}\left(P_1\sqrt{1-\varrho'^2} + P_2\,\eta\,\varrho'\right) - \frac{\varrho'}{\eta}\,Q_3 - \nu\,\frac{\sqrt{1-\varrho'^2}}{\eta\,\varrho}\,Q_2\,.$$

Es verbleibt das System von vier Differentialgleichungen erster Ordnung für die Variablen P_2, P_3, Q_2, Q_3:

$$P_2' + \left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right)P_2 = \frac{\sqrt{12\,(1-\nu^2)}}{\lambda}\,\frac{1}{\varrho\,\eta}\,Q_2 + \nu\,\frac{\sqrt{1-\varrho'^2}}{\varrho\,\eta}\,P_1 - \frac{\sqrt[4]{12\,(1-\nu^2)}}{E\,\lambda^2}\,\frac{\varrho}{\eta}\,K_2\,,$$

$$P_3' + \left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right)P_3 = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{12}}\,\lambda\,\frac{\eta\,\varrho'^2}{\varrho}\,Q_3 - P_2\sqrt{1-\varrho'^2} + \frac{\varrho'}{\eta}\,P_1\,,$$

$$Q_2' - \left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right)Q_2 = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{12}}\,\lambda\,\frac{\varrho'}{\varrho}\left(P_1\sqrt{1-\varrho'^2} + P_2\,\varrho'\,\eta\right) + Q_3\sqrt{1-\varrho'^2}\,,$$

$$Q_3' - \left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right)Q_3 = \frac{\sqrt{12\,(1-\nu^2)}}{\lambda}\,\frac{1}{\varrho\,\eta}\,P_3\,.$$

Das sind die *Münz*schen Schalengleichungen in dimensionsloser Form, hier aber mit der „bezogenen Bogenlänge" $\zeta = s/y_0$ als unabhängige Veränderliche.

C. Numerische Lösungsmethoden

10. Die Integration der *Münz*schen Differentialgleichungen. a) Lösungen des homogenen Problems. Zunächst betrachtet man das homogene System von vier Differentialgleichungen erster Ordnung mit $K_1 = K_2 = P_1 = 0$ als Anfangswertproblem. Man integriert dieses System von vier Differentialgleichungen viermal mit einem der bekannten numerischen Verfahren. Und zwar gibt man dafür die vier Quadrupel von Anfangsbedingungen vor:

	Q_2	P_2	Q_3	P_3
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

Die so gefundenen Lösungen des homogenen Problems sollen heißen:

$$\begin{array}{cccc} Q_2^1 & P_2^1 & Q_3^1 & P_3^1 \\ Q_2^2 & P_2^2 & Q_3^2 & P_3^2 \\ Q_2^3 & P_2^3 & Q_3^3 & P_3^3 \\ Q_2^4 & P_2^4 & Q_3^4 & P_3^4 \end{array}$$

b) Eine Lösung des inhomogenen Problems. Wie *H. Münz*[1] auf Seite 255 ff. schreibt, errechnen sich aus den obigen Lösungen des homogenen Problems die Partikularlösungen Q_2^0, P_2^0, Q_3^0, P_3^0 des inhomogenen Problems. Für die Programmierung ist jedoch folgendes Verfahren geeigneter.

Man löst einfach das inhomogene System von vier Differentialgleichungen mit der Anfangsbedingung

Q_2	P_2	Q_3	P_3
0	0	0	0

c) Das Randwertproblem. Da es sich um ein lineares Randwertproblem handelt, hat eine allgemeine Lösung die Form

$$P_r = P_r^0 + C_1 P_r^1 + C_2 P_r^2 + C_3 P_r^3 + C_4 P_r^4 .$$

Durch die Randbedingungen lassen sich die Konstanten C_n bestimmen.

Aus Gründen der Genauigkeit ist zu empfehlen, eine längere Schale in mehrere Bereiche zu unterteilen. Aus Rand- und Übergangsbedingungen folgt dann ein lineares Gleichungssystem für die Integrationskonstanten der einzelnen Bereiche.

11. Die Integration der *Meißner*schen Differentialgleichungen. Das soeben angegebene Verfahren läßt sich analog auch zur Integration der *Meißner*schen Differentialgleichungen heranziehen, da es sich hierbei ebenfalls um ein lineares Randwertproblem handelt.

Außerdem gibt es noch das bereits in Ziff. 1 erwähnte Verfahren von *W. Lohmann*. Dabei wird zunächst das homogene Problem unter Vernachlässigung von Θ und Ω auf eine *Riccati*sche Differentialgleichung zurückgeführt. Nachdem diese numerisch integriert ist, errechnen sich die Lösungen des homogenen Problems, die unter Berücksichtigung von Θ und Ω verbessert werden. Eine Partikularlösung des inhomogenen Problems findet man schließlich nach der Methode der „Variation der Konstanten". Die Programmierung für elektronische Rechenautomaten erfordert einen höheren Arbeitsaufwand als man zunächst voraussieht. Deshalb ist für Rechenautomaten mehr zu empfehlen, das System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wie soeben beschrieben, direkt auf numerischem Wege anzugehen.

12. Der Bereich der Achsennähe. Im Punkte $y = 0$ versagen die hier angegebenen numerischen Verfahren, da y bei den maßgebenden Gleichungen im Nenner auftritt. Aus diesem Grunde empfiehlt es sich, im Bereich der Achsennähe die Schale durch eine Platte (Tangentialebene) oder durch eine Kugelschale (Kugelkalotte) zu ersetzen. *F. Wirthwein* führt bei seinen Berechnungen des Flaschenbodens eine Kugelschale in Achsennähe ein. Er vereinfacht die dabei auftretende Differentialgleichung, indem er den Bereich der Kugelschale als sehr klein annimmt.

(Eingegangen am 16. Oktober 1958.)

Anschrift des Verfassers: *Eberhard Klingbeil*, Frankfurt a. M., Bergerweg am Heiligenstock.
Aus dem Institut für Praktische Mathematik der Technischen Hochschule in Darmstadt, Prof. Dr. *A. Walther*.

[1] Siehe Fußnote 7 von Seite 242.

Anwendung der Deltamatrizen auf inhomogene Probleme

Von **E. Pestel**

Herrn Folke K. G. Odqvist zur Vollendung seines 60. Lebensjahres

Das Verfahren der Delta- oder Determinantenmatrizen, das von *Fuhrke*[1] für die Untersuchung von Eigenschwingungen von Stäben und Rahmentragwerken entwickelt wurde, läßt sich in einfacher Weise auf die Behandlung erzwungener Schwingungen und statischer Probleme erweitern. In verschiedenen Arbeiten[2] wurde gezeigt, daß sich bei der Untersuchung der letztgenannten Aufgaben die gewöhnlichen Übertragungsmatrizen um eine Spalte und eine Zeile vergrößern. Im Falle des ebenen Biegeproblems ist dann die sogenannte erweiterte Übertragungsmatrix eine 5×5-Matrix. Um alle Unterdeterminanten zweiter Ordnung dieser erweiterten Übertragungsmatrix in das von *Fuhrke* angegebene Schema[3] der Deltamatrix einzuordnen, ist das Lexikon für die Anordnung der Unterdeterminanten wie folgt zu erweitern:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1,2	1,3	1,4	2,3	2,4	3,4	1,5	2,5	3,5	4,5

Die Deltamatrix (1) der erweiterten Übertragungsmatrix

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathfrak{C}_1 & \mathfrak{C}_2 \\ \hline \mathfrak{C}_3 & \mathfrak{C}_4 \end{array}\right] \tag{1}$$

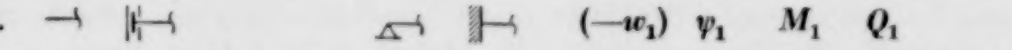
wird damit eine 10×10-Matrix, die sich in vier Untermatrizen einteilen läßt. Die Tatsache, daß die zwei Untermatrizen $\mathfrak{C}_3$ und $\mathfrak{C}_4$ in den letzten vier Zeilen der erweiterten Deltamatrix eine Nullmatrix bzw. der homogene Teil $\mathfrak{U}$ der erweiterten Übertragungsmatrix $\tilde{\mathfrak{U}}$ sind, folgt daraus, daß die letzte Zeile der erweiterten Übertragungsmatrix (2)

$$\tilde{\mathfrak{U}} = \left[\begin{array}{cccc|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \tilde{u}_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \tilde{u}_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \tilde{u}_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \tilde{u}_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{2}$$

vier Nullen und eine Eins enthält.

Die Untermatrix $\mathfrak{C}_1$, die die ersten sechs Zeilen und die ersten sechs Spalten umfaßt, ist identisch mit der Deltamatrix der freien Biegeschwingung, während die Untermatrix $\mathfrak{C}_2$ den Einfluß der Belastung wiedergibt.

Wenn man — im Gegensatz zu *Fuhrke* — die Probleme „von links nach rechts" durchrechnet, dann entsprechen die Spalten 1, 2, 5 und 6 der erweiterten Deltamatrix (3)

L. S.  $(-w_1)$ φ_1 M_1 Q_1

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccc} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} & U_{16} & U_{17} & U_{18} & U_{19} & U_{10} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} & U_{25} & U_{26} & U_{27} & U_{28} & U_{29} & U_{20} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} & U_{35} & U_{36} & U_{37} & U_{38} & U_{39} & U_{30} \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} & U_{45} & U_{46} & U_{47} & U_{48} & U_{49} & U_{40} \\ U_{51} & U_{52} & U_{53} & U_{54} & U_{55} & U_{56} & U_{57} & U_{58} & U_{59} & U_{50} \\ U_{61} & U_{62} & U_{63} & U_{64} & U_{65} & U_{66} & U_{67} & U_{68} & U_{69} & U_{60} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \mathfrak{U} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \end{array}\right] \tag{3}$$

R. S.

[1] *H. Fuhrke*, Ing.-Arch. 23 (1955) S. 329.
[2] vgl. z. B. *S. Falk*, Ing.-Arch. 24 (1956) S. 216 und *E. Pestel* und *G. Schumpich*, Schiffstechnik 4 (1957) S. 55.
[3] *H. Fuhrke*, a. a. O. S. 336

bestimmten am linken Ende des Stabes vorhandenen Randbedingungen, während die Zeilen 1, 2, 5 und 6 jeweils bestimmten Randbedingungen am rechten Balkenende entsprechen. Wie aus der Bildung der Elemente der Deltamatrizen gemäß dem obigen Lexikon ersichtlich ist, sind die Spalten 7, 8, 9 und 0 der erweiterten Deltamatrix (3) den Anfangswerten am linken Balkenende zugeordnet. Diese Anfangswerte, von denen infolge der Randbedingungen am linken Balkenende jeweils nur zwei unbekannt sind, lassen sich dann als der Quotient zweier Zahlen ermitteln.

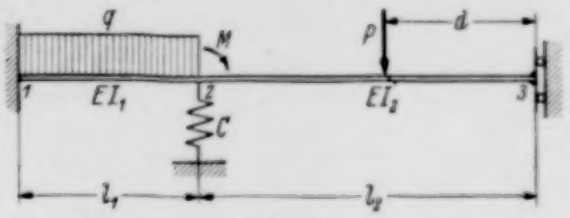


Abb. 1.

Die Anwendung der erweiterten Deltamatrix auf Probleme erzwungener Biegeschwingungen von Stäben oder entsprechender statischer Probleme läßt sich am einfachsten an einem Beispiel zeigen. Zu diesem Zwecke behandeln wir die in Abb. 1 dargestellte Aufgabe.

Zunächst stellen wir die drei gewöhnlichen erweiterten Übertragungsmatrizen zusammen:

a) Übertragungsmatrix für das Feld *1* zwischen den Punkten *1* und *2*:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & l_1 & \frac{l_1^2}{2EI_1} & \frac{l_1^3}{6EI_1} & -\frac{q\cdot l_1^4}{24EI_1} \\ 0 & 1 & \frac{l_1}{EI_1} & \frac{l_1^2}{2EI_1} & -\frac{q\cdot l_1^3}{6EI_1} \\ 0 & 0 & 1 & l_1 & -\frac{q\cdot l_1^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -q\cdot l_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{4}$$

b) Punktmatrix für die Federstütze in Punkt *2*:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & M \\ -C & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{5}$$

c) Übertragungsmatrix für das Feld *2* zwischen den Punkten *2* und *3*:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & l_2 & \frac{l_2^2}{2EI_2} & \frac{l_2^3}{6EI_2} & -\frac{P\,d^3}{6EI_2} \\ 0 & 1 & \frac{l_2}{EI_2} & \frac{l_2^2}{2EI_2} & -\frac{P\,d^2}{2EI_2} \\ 0 & 0 & 1 & l_2 & -P\cdot d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -P \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{6}$$

Bevor wir die entsprechenden Deltamatrizen aufstellen, ist es nützlich, die Auflagerbedingungen am linken und rechten Balkenende zu berücksichtigen. Da die linke Balkenseite eingespannt ist, brauchen wir entsprechend (3) von dem homogenen Teil der erweiterten Deltamatrix für das Feld *1*

nur die sechste Spalte. Im Hinblick darauf, daß wegen der linksseitigen Auflagerbedingung w_1 und φ_1 Null sind, d. h. also nur Moment und Querkraft von Null verschieden sind, benötigen wir außerdem nur noch die neunte und zehnte Spalte der erweiterten Deltamatrix für Feld *1*. Entsprechend der bekannten Regel für die Bestimmung der Elemente der Deltamatrizen ergeben sich unter Zuhilfenahme des obigen Lexikons die sechste, neunte und zehnte Spalte der erweiterten Deltamatrix für Feld *1*, wie folgt:

$$\left[\begin{array}{ccc}
\frac{l_1^4}{12\,(E\,I_1)^2} & -\frac{q\,l_1^5}{24\,(E\,I_1)^2} & -\frac{q\,l_1^6}{144\,(E\,I_1)^2} \\
\frac{l_1^3}{3\,E\,I_1} & -\frac{5\,q\,l_1^4}{24\,E\,I_1} & -\frac{q\,l_1^5}{24\,E\,I_1} \\
\frac{l_1^2}{2\,E\,I_1} & -\frac{q\,l_1^3}{2\,E\,I_1} & -\frac{3\,q\,l_1^4}{24\,E\,I_1} \\
\frac{l_1^2}{2\,E\,I_1} & -\frac{q\,l_1^3}{3\,E\,I_1} & -\frac{q\,l_1^4}{12\,E\,I_1} \\
\frac{l_1}{E\,I_1} & -\frac{q\,l_1^2}{E\,I_1} & -\frac{q\,l_1^3}{3\,E\,I_1} \\
1 & -q\,l_1 & -\frac{q\,l_1^2}{2} \\
\hline
0 & \frac{l_1^2}{2\,E\,I_1} & \frac{l_1^3}{6\,E\,I_1} \\
0 & \frac{l_1}{E\,I_1} & \frac{l_1^2}{2\,E\,I_1} \\
0 & 1 & l_1 \\
0 & 0 & 1
\end{array}\right] \tag{7}$$

Die erweiterte Deltamatrix für die Federstütze, an deren Ort auch ein äußeres Biegemoment angreift, wird mit Hilfe des eingangs angegebenen Lexikons auf Grund von (5) bestimmt:

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\
C & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & C & 0 & 0 & 0 & 1 & CM & 0 & 0 & -M \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \tag{8}$$

Da infolge der Auflagerbedingungen am rechten Balkenende φ_3 und Q_3 Null sind, braucht von der erweiterten Deltamatrix für das Feld *2* nur die fünfte Zeile berechnet zu werden, die folgendes Aussehen hat:

0	0	0	0	1	$\frac{l_2}{E\,I_2}$	0	$-P$	$-\frac{P\,l_2}{E\,I_2}$	$-\frac{P\,(l_2^3-d^2)}{2\,E\,I_2}$

(9)

Für die weitere Rechnung, die zwar auch im allgemeinen Zahlen durchgeführt werden könnte, wollen wir für die Daten des in Abb. 1 dargestellten Tragwerkes folgende Zahlenwerte verwenden:

$$q=1,\quad M=4,\quad C=1,\quad P=3,\quad l_1=2,\quad l_2=3,\quad d=2,\quad EJ_1=2/3,\quad EJ_2=1/2.$$

Indem wir diese Werte in die erweiterten Deltamatrizen einsetzen und diese entsprechend dem üblichen Multiplikationsschema von Matrizen anordnen, erhalten wir folgendes Rechenschema:

										(6)	(9)	(10)	Σ	
										3	−3	−1	−1	
										4	−5	−2	−3	
										3	−6	−3	−6	
										3	−4	−2	−3	
										3	−6	−4	−7	
										1	−2	−2	−3	
										0	3	2	5	
										0	3	3	6	
										0	1	2	3	
										0	0	1	1	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	/	/	/	/	(10)
0	1	0	0	0	0	4	0	0	0	/	/	/	/	
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	/	/	/	/	
0	0	0	1	0	0	0	4	0	0	/	/	/	/	
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	6	−9	−5	−8	
0	1	0	0	0	1	4	0	0	−4	5	5	0	10	
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	/	/	/	/	
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	3	3	6	
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	2	3	
0	0	0	0	0	0	−1	0	0	1	0	−3	−1	−4	
0	0	0	0	1	6	0	−3	−18	−15	36	39	−35	40	

Mit Hilfe der untersten drei Zahlenwerte, die wir nach Durchführung der Matrizenmultiplikation erhalten, lassen sich dann M_1 und Q_1 wie folgt bestimmen:

$$M_1 = -\frac{35}{36}, \qquad Q_1 = -\frac{39}{36}.$$

Als Rechenregel ist hierbei berücksichtigt, daß Zahlenwerte aus den Spalten 7 und 9 mit negativem Vorzeichen eingeführt werden müssen, eine Regel, die der bei der Lösung inhomogener linearer Gleichungen mit Hilfe von Determinanten zu beachtenden Regel entspricht.

Nachdem nunmehr der Zustandsvektor am linken Balkenende bekannt ist, können wir die Zustandsvektoren an der elastischen Zwischenstütze und am rechten Balkenende mit Hilfe der gewöhnlichen Übertragungsmatrizen (4), (5) und (6) wie folgt errechnen:

$$\left.\begin{array}{|ccccc|c|}
 & & & & & \begin{matrix}0\\0\\-\frac{35}{36}\\-\frac{39}{36}\\1\end{matrix} & \begin{matrix}=-w_1\\=\varphi_1\\=M_1\\=Q_1\\=1\end{matrix} \\
\hline
1 & 2 & 3 & 2 & -1 & -\frac{219}{36} & = -w_2^l \\
0 & 1 & 3 & 3 & -2 & -\frac{294}{36} & = \varphi_2^l \\
0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -\frac{185}{36} & = M_2^l \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{111}{36} & = Q_2^l \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & = 1 \\
\hline
\end{array}\right\} \qquad (11)$$

$$\left.\begin{array}{|cccccc|c|l}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{219}{36} & = -w_2^R \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{294}{36} & = \varphi_2^R \\
0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -\frac{41}{36} & = M_2^R \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & +\frac{108}{36} & = Q_2^R \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & = 1 \\
\hline
1 & 3 & 9 & 9 & -8 & -\frac{786}{36} & = -w_3 \\
0 & 1 & 6 & 9 & -12 & 0 & = \varphi_3 \\
0 & 0 & 1 & 3 & -6 & +\frac{67}{36} & = M_3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & = Q_3
\end{array}\right|$$

Durch die Verwendung von Deltamatrizen wird somit auch bei inhomogenen Problemen der Vorteil erzielt, daß die am Anfang der Rechnung eingeführten zwei Unbekannten nicht als Quotient zweier Determinanten wie im Falle der Verwendung gewöhnlicher Übertragungsmatrizen berechnet werden müssen, sondern sich als Quotienten zweier Zahlen ergeben. Damit wird auch die Gefahr ernster numerischer Fehler vermieden, die sich aus der Tatsache ergeben können, daß häufig die Nennerdeterminante bei der Anwendung des Verfahrens der gewöhnlichen Übertragungsmatrizen eine kleine Differenz großer Zahlen wird.

(Eingegangen am 22. Oktober 1958.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *E. Pestel*, Hannover, Am Welfengarten 1.

Zur Theorie des räumlich gekrümmten Stabes*

Von G. Kämmel

1. Einleitung. Der räumlich gekrümmte Stab war bereits oft Gegenstand theoretischer Untersuchungen. Diese Arbeiten gehen jedoch zumeist von Voraussetzungen aus, die dem zu untersuchenden, mehr oder weniger speziellen Problem genügen. Die Krümmungshalbmesser werden in der Regel als sehr groß gegenüber den Querschnittskoordinaten des Stabes angenommen, so daß die Spannungen über die Biegesteifigkeit des geraden Trägers gleichen Querschnitts ermittelt werden können. In der vorliegenden Arbeit wird diese Voraussetzung nicht gemacht. Es wird gezeigt, daß es, aufbauend auf den Überlegungen von *F. K. G. Odqvist*[1] für den Kreisringträger, d. h. unter exakter Formulierung der Bernoullischen Hypothese, auch für einen räumlich gekrümmten Stab möglich ist, die Dehnung und somit den Normalspannungszustand jeder einzelnen Stabfaser in Abhängigkeit von der Belastung anzugeben.

2. Die Geometrie der Raumkurve. Die Stabachse des Trägers sei in einem rechtsgewundenen kartesischen Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) durch die Parameterdarstellung

$$x_k = x_k(t) \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{1}$$

gegeben. Das Bogenelement $d\mathring{s}$ der Raumkurve erscheint dann in der Form[2]

$$d\mathring{s} = \sqrt{\frac{dx_k}{dt} \cdot \frac{dx_k}{dt}}\, dt\,. \tag{2}$$

Bezeichnet man mit $\varkappa$ die erste Krümmung und mit τ die zweite Krümmung oder Windung der Raumkurve, wobei

$$\varkappa = \sqrt{\frac{d^2x_k}{d\mathring{s}^2}\,\frac{d^2x_k}{d\mathring{s}^2}} = \sqrt{x_k'' \, x_k''} \tag{3.1}$$

und

$$\tau = \frac{\varepsilon_{ijk}\, x_i'\, x_j''\, x_k'''}{x_p''\, x_p''} \tag{3.2}$$

ist, so folgen die Vektoren des normierten begleitenden Dreibeins der Raumkurve zu

$$T_i = x_i'\,, \qquad H_i = \frac{1}{\varkappa}\, T_i'\,, \qquad B_i = \varepsilon_{ijk}\, T_j\, H_k\,. \tag{4}$$

Dabei bezeichnen T_i den Tangentenvektor, H_i den Hauptnormalenvektor und B_i den Binormalenvektor der Raumkurve. Mit (4) lauten die *Frenet*schen Formeln

$$T_i' = \varkappa\, H_i\,, \qquad H_i' = -\varkappa\, T_i + \tau\, B_i\,, \qquad B_i' = -\tau\, H_i\,. \tag{5}$$

3. Zusammenhänge zwischen der verformten und unverformten Raumkurve. Ein Punkt P der Stabachse unterliege dem Verschiebungsvektor r_k. Bezeichnet man mit $\mathring{u}$, $\mathring{v}$ und $\mathring{w}$ die Beträge der Komponenten des Verschiebungsvektors in Richtung der Tangente, Hauptnormalen und Binormalen, so kann r_k (Abb. 1) in der Form

$$r_k = \mathring{u}\, T_k + \mathring{v}\, H_k + \mathring{w}\, B_k \tag{6}$$

geschrieben werden. Der Tangentenvektor $\overline{T}_k$ der verformten Stabachse folgt dann mit (4), (5) und (6) zu

$$\overline{T}_k = T_k\,(1 + \mathring{u}' - \varkappa\, \mathring{v}) + H_k\,(\varkappa\, \mathring{u} + \mathring{v}' - \tau\, \mathring{w}) + B_k\,(\tau\, \mathring{v} + \mathring{w}')\,. \tag{7}$$

Man sieht sofort, daß $\overline{T}_k$ keinen Einheitsvektor darstellt, denn seine Norm ist, wenn die Verschiebungen als klein vorausgesetzt werden,

$$\overline{T}_p\, \overline{T}_p = 1 + 2\, \mathring{u}' - 2\, \varkappa\, \mathring{v}\,, \tag{8.1}$$

---

* Gekürzte Fassung einer von der Bergakademie Freiberg genehmigten Dissertation. Referenten: Prof. Dr.-Ing. habil. *D. Rüdiger*, Prof. Dr.-Ing. *A. Kneschke*.

[1] *F. K. G. Odqvist*, Ing.-Arch. 22 (1954) S. 98.

[2] Es wird hier und im Folgenden vorausgesetzt, daß in Ausdrücken, die zwei gleiche Indizes enthalten, über diese Indizes entsprechend den drei Dimensionen des Raumes von 1 bis 3 zu summieren ist.

und sein Betrag ergibt sich zu

$$\sqrt{\overline{T}_p\,\overline{T}_p} = 1 + \mathring{u}' - \varkappa\,\mathring{v}\,. \tag{8.2}$$

Der Vektor β_k der Verdrehung des Stabelementes bezogen auf die unverformte Stabachse (Abb. 2) läßt sich analog zu (6) in der Form

$$\beta_k = \vartheta\; T_k + \psi\, H_k + \varphi\; B_k \tag{9}$$

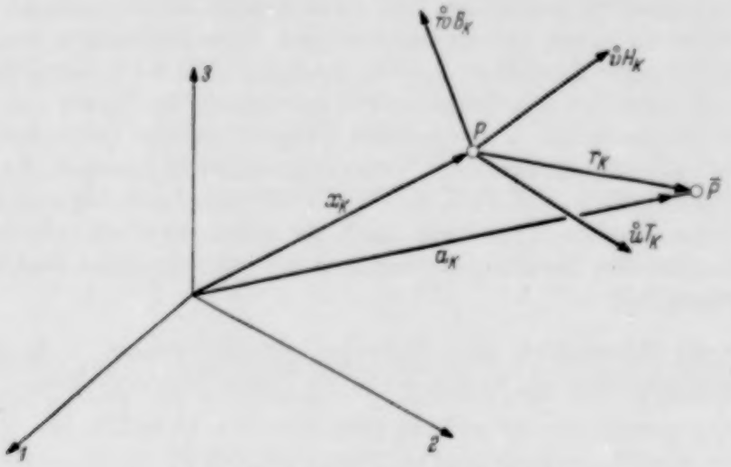


Abb. 1. Verschiebungsvektor des Punktes P.

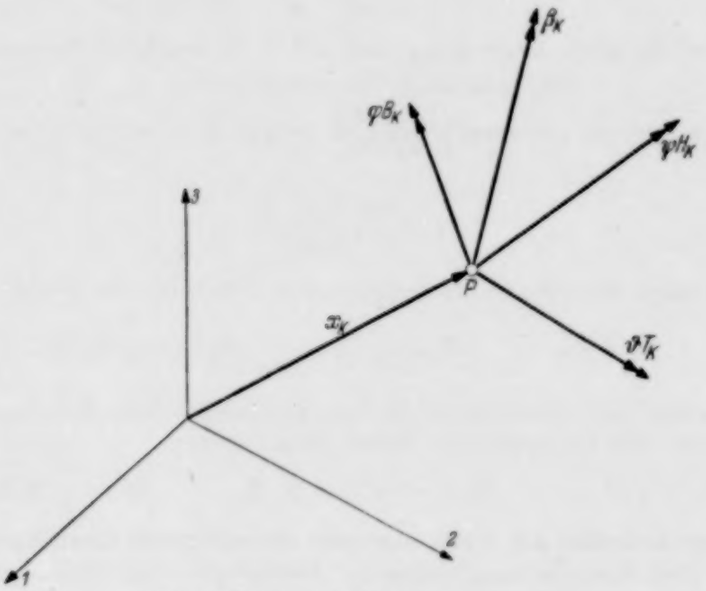


Abb. 2. Verdrehungsvektor des Stabelementes.

darstellen, wenn unter ϑ, ψ und φ die Beträge der Komponenten von β_k in Richtung der Tangente, Hauptnormalen und Binormalen verstanden werden. Um eine Beziehung zwischen den Drehwinkeln φ und ψ und den Verschiebungen $\mathring{u}$, $\mathring{v}$ und $\mathring{w}$ herzuleiten, wird der Winkel γ zwischen dem Tangentenvektor T_k der unverformten Stabachse und dem Tangentenvektor $\overline{T}_k$ der verformten Stabachse ermittelt. Mit

$$\sin\gamma \approx \gamma\,,$$

gilt dann

$$\gamma_i = \frac{e_{ijk}\; T_j\; \overline{T}_k}{\sqrt{\overline{T}_p\,\overline{T}_p}}\,. \tag{10.1}$$

Da andererseits jedoch auch

$$\gamma_i = \psi\, H_i + \varphi\; B_i \tag{10.2}$$

ist, so folgt

$$\psi H_i + \varphi B_i = \frac{\varepsilon_{ijk} T_j \bar{T}_k}{\sqrt{\bar{T}_p \bar{T}_p}} .$$

Unter Verwendung von (7) und (8.2) folgt mit den bekannten Beziehungen

$$B_i = \varepsilon_{ikl} T_k H_l , \qquad T_i = \varepsilon_{ikl} H_k B_l , \qquad H_i = \varepsilon_{ikl} B_k T_l$$

unmittelbar

$$\psi H_i + \varphi B_i = -(\tau \mathring{v} + \mathring{w}') H_i + (\varkappa \mathring{u} + \mathring{v}' - \tau \mathring{w}) B_i .$$

Damit lauten die gesuchten Beziehungen

$$\psi = -(\tau \mathring{v} + \mathring{w}') , \qquad \varphi = (\varkappa \mathring{u} + \mathring{v}' - \tau \mathring{w}) . \tag{11}$$

4. Die Verschiebungen jedes einzelnen Querschnittspunktes. Bisher wurde der Träger nur durch seine Stabachse beschrieben. Nun soll der Verschiebungszustand jedes einzelnen Querschnittspunktes dargestellt werden unter der Annahme, daß sich der Querschnitt längs $\mathring{s}$ nicht ändert. Jeder Punkt Q des Trägers wird (Abb. 3) in der Form

$$\overset{q}{x}_k = x_k + q_k = x_k + \xi H_k + \eta B_k \tag{12}$$

dargestellt.

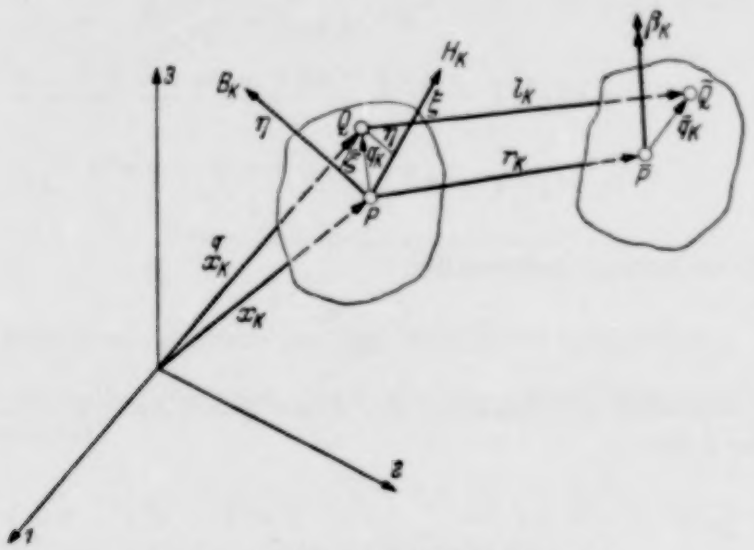


Abb. 3. Verschiebungsvektor des Punktes Q.

Unter der Voraussetzung der *Bernoulli*schen Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte, kann man den Trägerquerschnitt als starres Gebilde auffassen, dessen Bewegung durch eine Translation r_k und eine Rotation β_k festgelegt ist. Mit Hilfe des Drehtensors[1] D_{kl} gilt für den Vektor $\bar{q}_k$ (Abb. 3) folglich die Beziehung

$$\bar{q}_k = D_{kl} q_l . \tag{13.1}$$

Da die Drehung β_k als Verformungsgröße klein ist, erscheint mit

$$\sin \beta \approx \beta , \qquad \cos \beta \approx 1$$

der Drehtensor in der Form

$$D_{kl} = \delta_{kl} - \varepsilon_{klm} \beta_m . \tag{13.2}$$

Damit lautet Gleichung (13.1)

$$\bar{q}_k = q_k - \varepsilon_{klm} \beta_m q_l . \tag{13.3}$$

Das skalare Produkt $\bar{T}_k \bar{q}_k$ verschwindet, das heißt $\bar{T}_k$ und $\bar{q}_k$ sind orthogonale Vektoren. Jeder Querschnitt, der vor der Verformung senkrecht auf dem Tangentenvektor steht, steht demnach auch nach der Verformung senkrecht auf dem Tangentenvektor $\bar{T}_k$ der verformten Stabachse.

Der Verschiebungsvektor l_k folgt nach Abb. 3 zu

$$l_k = r_k + \bar{q}_k - q_k . \tag{14.1}$$

[1] Vgl. z. B. *A. Duschek* u. *A. Hochrainer*, Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung. Bd. 1. S. 78, Wien 1948.

Unter Berücksichtigung von (13.3), (14.1), (6), (9) und (12) ergibt sich

$$l_k = (\mathring{u} - \xi\,\varphi + \eta\,\psi)\,T_k + (\mathring{v} - \eta\,\vartheta)\,H_k + (\mathring{w} + \xi\,\vartheta)\,B_k\,. \tag{14.2}$$

Wird der Verschiebungsvektor l_k durch seine Komponenten u_k, v_k und w_k in Richtung der Tangente, Hauptnormalen und Binormalen der unverformten Stabachse dargestellt, so folgen die Beträge dieser Komponenten zu

$$u(\xi,\eta) = \mathring{u} - \xi\,\varphi + \eta\,\psi\,, \qquad v(\xi,\eta) = \mathring{v} - \eta\,\vartheta\,, \qquad w(\xi,\eta) = \mathring{w} + \xi\,\vartheta\,. \tag{15}$$

Für $\xi = \eta = 0$ sind die Verschiebungen nach (15) mit den Verschiebungen $\mathring{u}$, $\mathring{v}$ und $\mathring{w}$ der Stabachse identisch. Beachtet man in (12), daß x_k, H_k und B_k Funktionen der Bogenlänge $\mathring{s}$ sind, so ist

$$\overset{q}{x}_k(\mathring{s}) = x_k(\mathring{s}) + \xi\,H_k(\mathring{s}) + \eta\,B_k(\mathring{s}) \tag{16.1}$$

die Parameterdarstellung der Raumkurve einer Stabfaser $\xi = \text{konst.}$, $\eta = \text{konst.}$.

Das Längenelement ds dieser Faser folgt daraus zu

$$ds = \sqrt{(1 - \varkappa\,\xi)^2 + \tau^2\,(\xi^2 + \eta^2)}\;d\mathring{s}\,. \tag{16.2}$$

Nach der Verformung geht ds über in

$$\begin{aligned} d\overline{s} = \Bigg[&(1-\varkappa\,\xi)^2\left(1 + 2\,\frac{\mathring{u}' - \xi\,\varphi + \eta\,\psi' - \varkappa\,\mathring{v} + \varkappa\,\eta\,\vartheta}{1 - \varkappa\,\xi}\right) \\ &+ \tau^2\,\eta^2\left(1 - 2\,\frac{\varkappa\,\mathring{u} - \varkappa\,\xi\,\varphi + \varkappa\,\eta\,\psi + \mathring{v}' - \eta\,\vartheta' - \tau\,\mathring{w} - \tau\,\xi\,\vartheta}{\tau\,\eta}\right) \\ &+ \tau^2\,\xi^2\left(1 + 2\,\frac{\tau\,\mathring{v} - \tau\,\eta\,\vartheta + \mathring{w}' + \xi\,\vartheta'}{\tau\,\xi}\right)\Bigg]^{1/2} d\mathring{s}\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Die Dehnung ε dieser Faser beträgt bekanntlich

$$\varepsilon = \frac{d\overline{s} - ds}{ds}\,.$$

Mit (16.2) und (17) erscheint die Dehnung der Faser $\xi = \text{konst.}$, $\eta = \text{konst.}$ des räumlich gekrümmten Stabes in der Form

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{1}{(1 - \varkappa\,\xi)^2 + \tau^2\,(\xi^2 + \eta^2)}\,&[\mathring{u}' - \varkappa\,\mathring{v} + \xi\,(-\varphi' - \varkappa\,\mathring{u}' + \varkappa^2\,\mathring{v} + \tau^2\,\mathring{v} + \tau\,\mathring{w}') + \xi^2\,(\varkappa\,\varphi' + \tau\,\vartheta') \\ &+ \eta\,(\psi' + \varkappa\,\vartheta - \tau\,\varkappa\,\mathring{u} - \tau\,\mathring{v}' + \tau^2\,\mathring{w}) + \eta^2\,\tau\,(\vartheta' - \varkappa\,\psi) + \xi\,\eta\,(-\varkappa\,\psi' - \varkappa^2\,\vartheta + \tau\,\varkappa\,\varphi)]\,. \end{aligned} \tag{18.1}$$

Die Verdrehungen φ und ψ lassen sich daraus eliminieren, und man erhält

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{1}{(1 - \varkappa\,\xi)^2 + \tau^2\,(\xi^2 + \eta^2)}\,&[\mathring{u}' - \varkappa\,\mathring{v} + \xi\,(-2\,\varkappa\,\mathring{u}' - \varkappa'\,\mathring{u} - \mathring{v}'' + 2\,\tau\,\mathring{w}' + \tau'\,\mathring{w} + \varkappa^2\,\mathring{v} + \tau^2\,\mathring{v}) \\ &+ \xi^2\,(\varkappa^2\,\mathring{u}' + \mathring{u}\,\varkappa\,\varkappa' + \varkappa\,\mathring{v}'' - \varkappa\,\tau\,\mathring{w}' - \varkappa\,\tau'\,\mathring{w} + \tau\,\vartheta') + \eta\,(-2\,\tau\,\mathring{v}' - \tau'\,\mathring{v} - \mathring{w}'' + \varkappa\,\vartheta \\ &- \tau\,\varkappa\,\mathring{u} + \tau^2\,\mathring{w}) + \eta^2\,\tau\,(\vartheta + \varkappa\,\tau\,\mathring{v} + \varkappa\,\mathring{w}') + \xi\,\eta\,(2\,\varkappa\,\tau\,\mathring{v}' + \varkappa\,\tau'\,\mathring{v} + \varkappa\,\mathring{w}'' - \varkappa^2\,\vartheta \\ &+ \tau\,\varkappa^2\,\mathring{u} - \tau^2\,\varkappa\,\mathring{w})]\,. \end{aligned} \tag{18.2}$$

In (18) ist mit $\tau = 0$ und $\varkappa = \text{konst.}$ die von *F. K. G. Odqvist*[1] auf Grund der *Bernoulli*schen Hypothese aufgestellte Dehnung ε, unter Berücksichtigung der von *A. Björklund*[2] vorgenommenen Korrekturen, enthalten.

5. Die Gleichgewichtsbedingungen. An einem Stabelement der Länge $d\mathring{s}$ greifen an den Schnittufern je drei Schnittkräfte und Schnittmomente an, die den wirkenden Spannungen äquivalent sind. Schwerpunkt und Schubmittelpunkt des Querschnitts fallen zusammen.

Die Belastungskomponenten in Richtung der Tangente, Hauptnormalen und Binormalen sind p_T, p_H und p_B. Bezeichnet man mit m_T, m_H und m_B stetig angreifende Momentenbelastungen um

[1] *F. K. G. Odqvist*, Ing.-Arch. 22 (1954) S. 98.
[2] *A. Björklund*, Ing.-Arch. 23 (1955) S. 421.

die Achsen des begleitenden Dreibeins, so können die sechs Gleichgewichtsbedingungen nach *H. G. Bechert*[1] in der folgenden Form angeschrieben werden:

$$N' - \varkappa Q_H + p_T = 0\,, \tag{19.1}$$

$$Q'_H + \varkappa N - \tau Q_B + p_H = 0\,, \tag{19.2}$$

$$Q'_B + \tau Q_H + p_B = 0\,, \tag{19.3}$$

$$M'_T - \varkappa M_H + m_T = 0\,, \tag{20.1}$$

$$M'_H + \varkappa M_T - \tau M_B - Q_B + m_H = 0\,, \tag{20.2}$$

$$M'_B + \tau M_H + Q_H + m_B = 0\,. \tag{20.3}$$

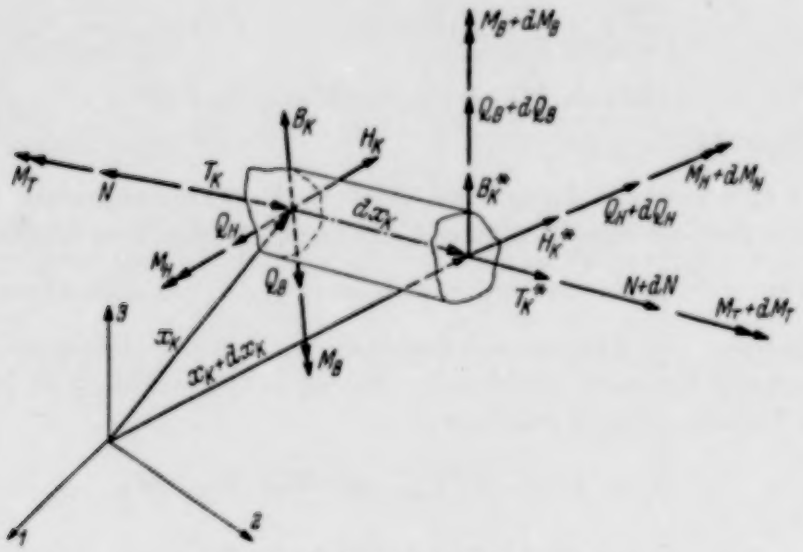


Abb. 4. Schnittgrößen am Stabelement.

6. Aufstellung der Differentialgleichungen des Verschiebungszustandes. Die Gleichung (16.1) stellt die Raumkurve jeder beliebigen Faser des Stabes dar. Der Tangentenvektor $\overset{q}{T}_k$ an eine solche Raumkurve ist gegeben durch

$$\overset{q}{T}_k = (1 - \varkappa\,\xi)\,T_k - \tau\,\eta\,H_k + \tau\,\xi\,B_k\,. \tag{21.1}$$

Er ist wie $\overline{T}_k$ in (7) kein Einheitsvektor, denn seine Norm folgt zu

$$\overset{q}{T}_k\,\overset{q}{T}_k = (1 - \varkappa\,\xi)^2 + \tau^2\,(\eta^2 + \xi^2)\,. \tag{21.2}$$

Da die Dehnung ε in die Richtung von $\overset{q}{T}_k$ fällt, kann die Dehnung jeder Stabfaser vektoriell in der Form

$$\varepsilon_k = \varepsilon\,\frac{\overset{q}{T}_k}{\sqrt{\overset{q}{T}_p\,\overset{q}{T}_p}} \tag{22}$$

geschrieben werden. Bei Gültigkeit des *Hooke*schen Gesetzes ordnet die Dehnung ε_k nach (22) jedem Querschnittspunkt den Spannungsvektor

$$\sigma_k = E\,\varepsilon_k \tag{23}$$

zu. Die Zerlegung des Spannungsvektors nach den Richtungen des begleitenden Dreibeins liefert die Normalspannung σ_T und die Schubspannungen σ_H und σ_B

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_T &= E\,\varepsilon\,\frac{(1 - \varkappa\,\xi)}{\sqrt{(1 - \varkappa\,\xi)^2 + \tau^2\,(\eta^2 + \xi^2)}}\,,\\
\sigma_H &= -\,E\,\varepsilon\,\frac{\tau\,\eta}{\sqrt{(1 - \varkappa\,\xi)^2 + \tau^2\,(\eta^2 + \xi^2)}}\,,\\
\sigma_B &= E\,\varepsilon\,\frac{\tau\,\xi}{\sqrt{(1 - \varkappa\,\xi)^2 + \tau^2\,(\eta^2 + \xi^2)}}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

[1] *H. G. Bechert.* Zur Statik räumlich gekrümmter Träger. Diss. Karlsruhe 1954.

Die Darstellung der Spannungen durch die ihnen äquivalenten Schnittkräfte erfolgt auf bekannte Weise zu

$$N = \int_F \sigma_T \, dF \,, \qquad M_H = \int_F \sigma_T \, \eta \, dF \,, \qquad M_B = -\int_F \sigma_T \, \xi \, dF \,. \tag{25}$$

Das Torsionsmoment M_T setzt sich aus zwei Anteilen zusammen. Der primäre Anteil $\overset{p}{M}_T$ resultiert aus den üblichen *de St. Venant*schen Torsionsschubspannungen. Den sekundären Anteil $\overset{s}{M}_T$ erzeugen die in (24) berechneten Schubspannungen σ_H und σ_B. Es ergibt sich somit

$$M_T = \overset{p}{M}_T + \overset{s}{M}_T \,,$$

$$M_T = \overset{p}{M}_T - \int_F \sigma_H \, \eta \, dF + \int_F \sigma_B \, \xi \, dF \,.$$

Mit (18), (24) und (25) sind die Längskraft N und die Schnittmomente M_H und M_B nach erfolgter Integration über die Querschnittsfläche F als Funktion der Verschiebungen $\mathring{u}$, $\mathring{v}$, $\mathring{w}$ der Stabachse und der Verdrehung ϑ um die Stabachse bekannt. Auch das sekundäre Torsionsmoment $\overset{s}{M}_T$ ist in dieser Form gegeben. Der Zusammenhang zwischen dem Torsionsmoment $\overset{p}{M}_T$ und dem Verschiebungszustand ist zunächst noch unbekannt. Dieser Zusammenhang ist jedoch zur eindeutigen Berechnung der zehn Unbekannten Funktionen

$$\mathring{u},\ \mathring{v},\ \mathring{w},\ \vartheta,\ N,\ Q_H,\ Q_B,\ M_T,\ M_H,\ M_B$$

notwendig, denn es stehen mit den sechs Gleichgewichtsbedingungen (19) und (20) und den drei Gleichungen (25) nur neun Gleichungen zur Verfügung. Die fehlende zehnte Gleichung wird auf Grund der *Bernoulli*schen Hypothese aus der Änderung des Drillwinkels um die Stabachse bei Fortschreiten um $d\mathring{s}$ gewonnen. Ein Querschnitt verdreht sich um β_k. Die Änderung des Drehwinkels bei Fortschreiten um $d\mathring{s}$ ist

$$d\beta_k = \beta_k' \, ds \,. \tag{26.1}$$

Mit (9) und bei Benutzung der *Frenet*schen Formeln (5) ergibt sich die Winkeländerung zu

$$d\beta_k = [(\vartheta' - \varkappa \psi) \, T_k + (\psi' + \varkappa \vartheta - \tau \varphi) \, H_k + (\varphi' + \tau \psi) \, B_k] \, d\mathring{s} \,. \tag{26.2}$$

Die tangentiale Komponente von $d\beta_k$ stellt somit die Änderung des Drillwinkels dar. Für diese gilt

$$(\vartheta' - \varkappa \psi) \, d\mathring{s} \,. \tag{27}$$

Diese Winkeländerung am Stabelement $d\mathring{s}$ muß mit dem primären Torsionsmoment in Beziehung stehen, da die sekundären Schubspannungen keinen Einfluß auf den Drillwinkel haben. Sie ist formal mit der Winkeländerung am Kreisringträger identisch. Für den Zusammenhang mit dem Torsionsmoment wird

$$\vartheta' - \varkappa \psi = \frac{\overset{p}{M}_T}{G \, K} \tag{28}$$

festgelegt, wobei in erster Annäherung die Torsionssteifigkeit GK von der Theorie gerade Stäbe gleichen Querschnitts übernommen wird. Damit folgt

$$M_T = G K \, (\vartheta' + \varkappa \tau \mathring{v} + \varkappa \mathring{w}') - \int_F \sigma_H \, \eta \, dF + \int_F \sigma_B \, \xi \, dF \,. \tag{29}$$

Gleichung (29) stellt die noch fehlende zehnte Gleichung dar.

Damit sind der Spannungs- und Verschiebungszustand des räumlich gekrümmten Trägers eindeutig gegeben. Führt man für die in (25) und (29) nach Einsetzen von (24) und (18) auftretenden

Integrale über die Querschnittsfläche F folgende Abkürzungen ein

$$\left.\begin{aligned}
J_1 &= \int_F \frac{dF}{[(1-\varkappa\xi)^2+\tau^2(\eta^2+\xi^2)]^{3/2}}, & J_2 &= \int_F \frac{\xi}{[(1-\varkappa\xi)^2+\tau^2(\eta^2+\xi^2)]^{3/2}}\,dF,\\
J_3 &= \int_F \frac{\xi^2}{[(1-\varkappa\xi)^2+\tau^2(\eta^2+\xi^2)]^{3/2}}\,dF, & J_4 &= \int_F \frac{\eta^2}{[(1-\varkappa\xi)^2+\tau^2(\eta^2+\xi^2)]^{3/2}}\,dF,\\
J_5 &= \int_F \frac{\xi^3}{[(1-\varkappa\xi)^2+\tau^2(\eta^2+\xi^2)]^{3/2}}\,dF, & J_6 &= \int_F \frac{\xi\eta^2}{[(1-\varkappa\xi)^2+\tau^2(\eta^2+\xi^2)]^{3/2}}\,dF,\\
J_7 &= \int_F \frac{\xi^2\eta^2}{[(1-\varkappa\xi)^2+\tau^2(\eta^2+\xi^2)]^{3/2}}\,dF, & J_8 &= \int_F \frac{\xi^4}{[(1-\varkappa\xi)^2+\tau^2(\eta^2+\xi^2)]^{3/2}}\,dF,\\
J_9 &= \int_F \frac{\eta^4}{[(1-\varkappa\xi)^2+\tau^2(\eta^2+\xi^2)]^{3/2}}\,dF, & J_{10} &= \int_F \frac{\eta}{[(1-\varkappa\xi)^2+\tau^2(\eta^2+\xi^2)]^{3/2}}\,dF,\\
J_{11} &= \int_F \frac{\xi\eta}{[(1-\varkappa\xi)^2+\tau^2(\eta^2+\xi^2)]^{3/2}}\,dF, & J_{12} &= \int_F \frac{\xi^2\eta}{[(1-\varkappa\xi)^2+\tau^2(\eta^2+\xi^2)]^{3/2}}\,dF,\\
J_{13} &= \int_F \frac{\eta^3}{[(1-\varkappa\xi)^2+\tau^2(\eta^2+\xi^2)]^{3/2}}\,dF, & J_{14} &= \int_F \frac{\xi^3\eta}{[(1-\varkappa\xi)^2+\tau^2(\eta^2+\xi^2)]^{3/2}}\,dF,
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

$$J_{15} = \int_F \frac{\xi\eta^3}{[(1-\varkappa\xi)^2+\tau^2(\eta^2+\xi^2)]^{3/2}}\,dF,$$

so erscheinen die Schnittkräfte und Schnittmomente als Funktionen der vier Formänderungsgrößen der Stabachse in der Form

$$\begin{aligned}
N = {} & E\,\mathring{u}\,(-\varkappa' J_2 + 2\varkappa\varkappa' J_3 - \varkappa^2\varkappa' J_5 - \varkappa\tau J_{10} + 2\varkappa^2\tau J_{11} - \varkappa^3\tau J_{12})\\
& + E\,\mathring{v}\,(-\varkappa J_1 + \tau^2 J_2 + 2\varkappa^2 J_2 - \varkappa^3 J_3 - \varkappa\tau^2 J_3 + \varkappa\tau^2 J_4 - \varkappa^2\tau^2 J_6 - \tau' J_{10} + 2\tau'\varkappa J_{11} - \varkappa^2\tau' J_{12})\\
& + E\,\mathring{w}\,(\tau' J_2 - 2\varkappa\tau' J_3 + \varkappa^2\tau' J_5 + \tau^2 J_{10} - 2\tau^2\varkappa J_{11} + \tau^2\varkappa^2 J_{12})\\
& + E\,\vartheta\,\varkappa\,(J_{10} - 2\varkappa J_{11} + \varkappa^2 J_{12}) + E\,\mathring{u}'\,(J_1 - 3\varkappa J_2 + 3\varkappa^2 J_3 - \varkappa^3 J_5)\\
& + E\,\mathring{v}'\,\tau\,(-2 J_{10} + 4\varkappa J_{11} - 2\varkappa^2\tau J_{12}) + E\,\mathring{w}'\,\tau\,(2 J_2 - 3\varkappa J_3 + \varkappa J_4 + \varkappa^2 J_5 - \varkappa^2 J_6)\\
& + E\,\vartheta'\tau\,(J_3 + J_4 - \varkappa J_5 - \varkappa J_6) + E\,\mathring{v}''\,(-J_2 + 2\varkappa J_3 - \varkappa^2 J_5)\\
& + E\,\mathring{w}''\,(-J_{10} + 2\varkappa J_{11} - \varkappa^2 J_{12}),
\end{aligned} \tag{31.1}$$

$$\begin{aligned}
M_H = {} & E\,\mathring{u}\,(-\varkappa\tau J_4 + 2\varkappa^2\tau J_6 - \varkappa^3\tau J_7 - \varkappa' J_{11} + 2\varkappa\varkappa' J_{12} - \varkappa^2\varkappa' J_{14})\\
& + E\,\mathring{v}\,(-\tau' J_4 + 2\varkappa\tau' J_6 - \varkappa^2\tau' J_7 - \varkappa J_{10} + \tau^2 J_{11} + 2\varkappa^2 J_{11} - \varkappa^3 J_{12} - \varkappa\tau^2 J_{12} + \varkappa\tau^2 J_{13} - \varkappa^2\tau^2 J_{15})\\
& + E\,\mathring{w}\,(\tau^2 J_4 - 2\varkappa\tau^2 J_6 + \varkappa^2\tau^2 J_7 + \tau' J_{11} - 2\varkappa\tau' J_{12} + \varkappa^2\tau' J_{14})\\
& + E\,\vartheta\,\varkappa\,(J_4 - 2\varkappa J_6 + \varkappa^2 J_7) + E\,\mathring{u}'\,(J_{10} - 3\varkappa J_{11} + 3\varkappa^2 J_{12} - \varkappa^3 J_{14})\\
& + E\,\mathring{v}'\,2\tau\,(-J_4 + \varkappa J_6 - \varkappa^2 J_7) + E\,\mathring{w}'\,\tau\,(2 J_{11} - 3\varkappa J_{12} + \varkappa J_{13} + \varkappa^2 J_{14} - \varkappa^2 J_{15})\\
& + E\,\vartheta'\tau\,(J_{12} + J_{13} - \varkappa J_{14} - \varkappa J_{15}) + E\,\mathring{v}''\,(-J_{11} + 2\varkappa J_{12} - \varkappa^2 J_{14})\\
& + E\,\mathring{w}''\,(-J_4 + 2\varkappa J_6 - \varkappa^2 J_7),
\end{aligned} \tag{31.2}$$

$$\begin{aligned}
M_B = {} & E\,\mathring{u}\,(\varkappa' J_3 - 2\varkappa\varkappa' J_5 + \varkappa^2\varkappa' J_8 + \varkappa\tau J_{11} - 2\varkappa^2\tau J_{12} + \varkappa^3\tau J_{14})\\
& + E\,\mathring{v}\,(\varkappa J_2 - \tau^2 J_3 - 2\varkappa^2 J_3 + \varkappa^3 J_5 + \varkappa\tau^2 J_5 - \varkappa\tau^2 J_6 + \varkappa^2\tau^2 J_7 + \tau' J_{11} - 2\varkappa\tau' J_{12} + \varkappa^2\tau' J_{14})\\
& + E\,\mathring{w}\,(-\tau' J_3 + 2\varkappa\tau' J_5 - \varkappa^2\tau' J_8 - \tau^2 J_{11} + 2\varkappa\tau^2 J_{12} - \varkappa^2\tau^2 J_{14})\\
& + E\,\vartheta\,\varkappa\,(-J_{11} + 2\varkappa J_{12} - \varkappa^2 J_{14}) + E\,\mathring{u}'\,(-J_2 + 3\varkappa J_3 - 3\varkappa^2 J_5 + \varkappa^3 J_8)\\
& + E\,\mathring{v}'\,2\tau\,(J_{11} - 2\varkappa J_{12} + \varkappa^2 J_{14}) + E\,\mathring{w}'\,\tau\,(-2 J_3 + 3\varkappa J_5 - \varkappa J_6 + \varkappa^2 J_7 - \varkappa^2 J_8)\\
& + E\,\vartheta'\tau\,(-J_5 - J_6 + \varkappa J_7 + \varkappa J_8) + E\,\mathring{v}''\,(J_3 - 2\varkappa J_5 + \varkappa^2 J_8)\\
& + E\,\mathring{w}''\,(J_{11} - 2\varkappa J_{12} + \varkappa^2 J_{14}),
\end{aligned} \tag{31.3}$$

$$
\begin{aligned}
M_T = {} & E\,\mathring{u}\,\tau\,(-\varkappa' J_5 - \varkappa' J_6 + \varkappa\varkappa' J_7 + \varkappa\varkappa' J_8 - \varkappa\tau J_{12} - \varkappa\tau J_{13} + \varkappa^2\tau J_{14} + \varkappa^2\tau J_{15}) \\
& + E\,\mathring{v}\,\tau\Big(-\varkappa J_3 - \varkappa J_4 + \varkappa^2 J_5 + \tau^2 J_5 + \varkappa^2 J_6 + \tau^2 J_6 + \varkappa\tau^2 J_7 + \varkappa\tau^2 J_9 - \tau' J_{12} - \tau' J_{13} \\
& \qquad + \varkappa\tau' J_{14} + \varkappa\tau' J_{15} + \varkappa\frac{G\,K}{E}\Big) \\
& + E\,\mathring{w}\,\tau\,(\tau' J_5 + \tau' J_6 - \varkappa\tau' J_7 - \varkappa\tau' J_8 + \tau^2 J_{12} + \tau^2 J_{13} - \varkappa\tau^2 J_{14} - \varkappa\tau^2 J_{15}) \\
& + E\,\vartheta\,\varkappa\,\tau\,(J_{12} + J_{13} - \varkappa J_{14} - \varkappa J_{15}) + E\,\mathring{v}'\,2\,\tau\,(-J_{12} - J_{13} + \varkappa J_{14} + \varkappa J_{15}) \\
& + E\,\mathring{u}'\,\tau\,(J_3 + J_4 - 2\,\varkappa J_5 - 2\,\varkappa J_6 + \varkappa^2 J_7 + \varkappa^2 J_8) \\
& + E\,\mathring{w}'\Big(2\,\tau^2 J_5 + 2\,\tau^2 J_6 - \varkappa\tau^2 J_8 + \varkappa\tau^2 J_9 + \varkappa\tau J_{14} + \varkappa\tau J_{15} + \varkappa\frac{G\,K}{E}\Big) \\
& + E\,\vartheta'\Big(2\,\tau^2 J_7 + \tau^2 J_8 + \tau^2 J_9 + \frac{G\,K}{E}\Big) + E\,\mathring{v}''\,\tau\,(-J_5 - J_6 + \varkappa J_7 + \varkappa J_8) \\
& + E\,\mathring{w}''\,\tau\,(-J_{12} - J_{13})\,. \qquad (31.4)
\end{aligned}
$$

Zusammen mit den Gleichgewichtsbedingungen (19) und (20) stellen die Gleichungen (31) die Differentialgleichungen des Spannungs- und Verschiebungszustandes eines Trägers dar, dessen Stabachse eine beliebige Raumkurve beschreibt. Die Gleichgewichtsbedingungen sind für jeden Belastungsfall integrierbar. Beim Randwertproblem zweiter Art (statisch bestimmter Fall) kann der Schnittkraftverlauf eindeutig angegeben werden. Die Gleichungen (31) liefern den dazugehörigen Verschiebungszustand.

Beim Randwertproblem erster oder dritter Art (statisch unbestimmter Fall) ist der Schnittkraftverlauf bis auf gewisse Integrationskonstanten bestimmt. Mit dem entsprechenden Verschiebungszustand nach (31) sind sämtliche vorgegebenen Randbedingungen zu erfüllen.

7. Anwendung der allgemeinen Theorie auf einen Träger, dessen Stabachse eine gewöhnliche Schraubenlinie beschreibt. Mit ϱ als Drehwinkel und a als Halbmesser im Grundkreis lautet die Parameterdarstellung der Schraubenlinie

$$x_1 = a\cos\varrho\,, \qquad x_2 = a\sin\varrho\,, \qquad x_3 = c\,\varrho\,. \qquad (32)$$

Das Bogenelement folgt mit

$$\frac{c}{a} = \omega \qquad (33)$$

zu

$$d\mathring{s} = a\sqrt{1+\omega^2}\,d\varrho\,. \qquad (34)$$

Die Krümmung ergibt sich in der Form

$$\varkappa = \frac{1}{a\,(1+\omega^2)}\,, \qquad (35)$$

und die Windung folgt zu

$$\tau = \frac{\omega}{a\,(1+\omega^2)}\,. \qquad (36)$$

Krümmung und Windung sind konstante Werte längs der Bogenlänge $\mathring{s}$. Die Gleichgewichtsbedingungen (19) lassen sich mit der Abkürzung

$$\alpha^2 = \frac{1}{1+\omega^2} \qquad (37)$$

durch Elimination von N und Q_B auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für Q_H zurückführen. Sie lautet

$$\frac{d^2 Q_H}{d\varrho^2} + Q_H = a\Big(p_T - \frac{1}{\alpha}\frac{dp_H}{d\varrho} + \omega\,p_B\Big)\,, \qquad (38)$$

und ihre Lösung ist

$$Q_H = a\int_0^\varrho (p_T - \omega\,p_B)\sin(\varrho-\lambda)\,d\lambda - \frac{a}{\alpha}\int_0^\varrho p_H\cos(\varrho-\lambda)\,d\lambda + \alpha\,(\mathring{N} + \omega\,\mathring{Q}_B)\sin\varrho + \mathring{Q}_H\cos\varrho\,, \qquad (39.1)$$

Mit der Lösung für die Querkraft Q_H sind auch die beiden Schnittkräfte Q_B und N bestimmt. Sie werden

$$Q_B = a\,\omega\,\alpha \int_0^\varrho (p_T - \omega\, p_B)\cos(\varrho - \lambda)\,d\lambda + a\,\omega \int_0^\varrho p_H \sin(\varrho - \lambda)\,d\lambda - a\,\alpha \int_0^\varrho (\omega\, p_T + p_B)\,d\lambda$$
$$+ \omega\,\alpha^2 (-\mathring{N} + \omega\,\mathring{Q}_B)\cos\varrho - \omega\,\alpha\,\mathring{Q}_H \sin\varrho + \alpha^2\,\mathring{Q}_B + \omega\,\alpha^2\,\mathring{N}', \tag{39.2}$$

$$N = -a\,\alpha \int_0^\varrho (p_T - \omega\, p_B)\cos(\varrho - \lambda)\,d\lambda - a \int_0^\varrho p_H \sin(\varrho - \lambda)\,d\lambda - a\,\omega\,\alpha \int_0^\varrho (\omega\, p_T + p_B)\,d\lambda$$
$$+ \alpha^2 (\mathring{N} - \omega\,\mathring{Q}_B)\cos\varrho + \alpha\,\mathring{Q}_H \sin\varrho + \omega\,\alpha^2 (\mathring{Q}_B + \omega\,\mathring{N}). \tag{39.3}$$

Dabei sind die Integrationskonstanten so gewählt, daß die Schnittkräfte in Abhängigkeit der an der Stelle $\varrho = 0$ wirkenden Kräfte $\mathring{N}$, $\mathring{Q}_H$ und $\mathring{Q}_B$ erscheinen. Die Gleichgewichtsbedingungen (20) lassen sich durch Elimination von M_T und M_B auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für M_H zurückführen. Sie lautet

$$\frac{d^2 M_H}{d\varrho^2} + M_H = a\left(-2\,\omega\,Q_H - \frac{a}{\alpha^2}\,p_B - \omega\, m_B - \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{dm_H}{d\lambda} + m_T\right), \tag{40}$$

und ihre Lösung ist

$$M_H = \frac{a}{\alpha^2}\int_0^\varrho (-a\,p_B + \alpha^2\, m_T - \omega\,\alpha^2\, m_B)\sin(\varrho - \lambda)\,d\lambda - \frac{a}{\alpha}\int_0^\varrho m_H \cos(\varrho - \lambda)\,d\lambda$$
$$- 2\,a^2\,\omega \int_0^\varrho \int_0^\lambda (p_T - \omega\, p_B)\sin(\lambda - \mu)\,d\mu \sin(\varrho - \lambda)\,d\lambda$$
$$+ \frac{2\,a^2\,\omega}{\alpha}\int_0^\varrho \int_0^\lambda p_H \cos(\lambda - \mu)\,d\mu \sin(\varrho - \lambda)\,d\lambda + a\,\alpha\,(\sin\varrho + \omega^2\,\varrho\cos\varrho)\,\mathring{Q}_B$$
$$- a\,\omega\,\varrho\sin\varrho\,\mathring{Q}_H + a\,\omega\,\alpha\,(\sin\varrho - \varrho\cos\varrho)\,\mathring{N} + \alpha\sin\varrho\,(\omega\,\mathring{M}_B - \mathring{M}_T) + \cos\varrho\,\mathring{M}_H. \tag{41.1}$$

Mit der Lösung für das Biegemoment M_H sind auch das Torsionsmoment M_T und das Biegemoment M_B berechnet:

$$M_T = a\,\alpha^2 \int_0^\varrho [2\,a\,\omega\, p_T + a\,(1 - \omega^2)\,p_B - m_T + \omega\, m_B]\cos(\varrho - \lambda)\,d\lambda$$
$$+ a \int_0^\varrho (2\,a\,\omega\, p_H - m_H)\sin(\varrho - \lambda)\,d\lambda + a\,\alpha \int_0^\varrho [-2\,a\,\omega\, p_T - a\,(1 - \omega^2)\,p_B - \omega^2\, m_T - \omega\, m_B]\,d\lambda$$
$$+ 2\,a^2\,\alpha\,\omega \int_0^\varrho \int_0^\lambda (p_T - \omega\, p_B)\sin(\lambda - \mu)\,d\mu\cos(\varrho - \lambda)\,d\lambda - 2\,a^2\,\omega \int_0^\varrho \int_0^\lambda p_H \cos(\lambda - \mu)\,d\mu\cos(\varrho - \lambda)\,d\lambda$$
$$+ a\,\alpha^2\,[\omega^2\,\varrho\sin\varrho + (1 - \omega^2)\,(1 - \cos\varrho)]\,\mathring{Q}_B + a\,\omega\,\alpha\,(-\sin\varrho + \varrho\cos\varrho)\,\mathring{Q}_H$$
$$+ a\,\omega\,\alpha^2\,[2\,(1 - \cos\varrho) - \varrho\sin\varrho]\,\mathring{N} + \omega\,\alpha^2\,(1 - \cos\varrho)\,\mathring{M}_B + \alpha^2\,(\cos\varrho + \omega^2)\,\mathring{M}_T + \mathring{M}_H \sin\varrho, \tag{41.2}$$

$$M_B = \frac{a}{\alpha}\int_0^\varrho [a\,(1 - \omega^2)\,p_T - 2\,a\,\alpha^2\,\omega\, p_B + \alpha^2\,\omega\, m_T - \omega^2\,\alpha^2\, m_B]\cos(\varrho - \lambda)\,d\lambda$$
$$+ a \int_0^\varrho [a\,(1 - \omega^2)\,p_H + \omega\, m_H]\sin(\varrho - \lambda)\,d\lambda + a\,\alpha \int_0^\varrho [-a\,(1 - \omega^2)\,p_T + 2\,a\,\omega\, p_B - \omega\, m_T - m_B]\,d\lambda$$
$$- 2\,a^2\,\alpha\,\omega^2 \int_0^\varrho \int_0^\lambda (p_T - \omega\, p_B)\sin(\lambda - \mu)\,d\mu\cos(\varrho - \lambda)\,d\lambda$$
$$+ 2\,a^2\,\omega^2 \int_0^\varrho \int_0^\lambda p_H \cos(\lambda - \mu)\,d\mu\cos(\varrho - \lambda)\,d\lambda + a\,\omega\,\alpha^2\,[-\omega^2\,\varrho\sin\varrho - 2\,(1 - \cos\varrho)]\,\mathring{Q}_B$$
$$+ a\,\alpha^2\,[\omega^2\,\varrho\sin\varrho + (1 - \omega^2)\,(1 - \cos\varrho)]\,\mathring{N} + a\,\alpha\,(-\omega^2\,\varrho\cos\varrho - \sin\varrho)\,\mathring{Q}_H$$
$$+ \omega\,\alpha^2\,(1 - \cos\varrho)\,\mathring{M}_T + \alpha^2\,(1 + \omega^2\cos\varrho)\,\mathring{M}_B - \omega\,\alpha\sin\varrho\,\mathring{M}_H. \tag{41.3}$$

Die Integrationskonstanten sind wiederum so eingeführt, daß die Momente in Abhängigkeit der an der Stelle $\varrho = 0$ wirkenden Momente $\mathring{M}_T$, $\mathring{M}_H$ und $\mathring{M}_B$ auftreten.

Damit sind sämtliche Schnittkräfte als Funktion des Belastungszustandes und der Randkräfte bzw. Randmomente bekannt. Für den statisch bestimmt gestützten Träger sind die Randwerte

$$\mathring{N},\ \mathring{Q}_H,\ \mathring{Q}_B,\ \mathring{M}_T,\ \mathring{M}_H \text{ und } \mathring{M}_B \tag{42}$$

aus den Gleichgewichtsbedingungen am Gesamttragwerk bekannt. Im statisch unbestimmten Falle können diese Randwerte nur im Zusammenhang mit dem Verschiebungszustand ermittelt werden. Der Zusammenhang zwischen den Schnittkräften und den Verschiebungen ist durch (31) hergestellt.

Der weiteren Berechnung wird ein symmetrischer Trägerquerschnitt zugrunde gelegt. Seine Symmetrieachse falle mit der Richtung der Hauptnormalen zusammen. Dann verschwinden die Integrale $J_{10} \dots J_{15}$ (30). Die Gleichungen (31) erscheinen dann mit den dimensionslosen Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{a}\left[-\varkappa J_1 + (\tau^2 + 2\varkappa^2) J_2 - \varkappa(\varkappa^2 + \tau^2) J_3 + \varkappa \tau^2 J_4 - \varkappa^3 \tau^2 J_6\right],\\
A_2 &= \frac{\alpha}{a^2}(J_1 - 3\varkappa J_2 + 3\varkappa^2 J_3 - \varkappa^3 J_5),\\
A_3 &= \frac{\alpha}{a^2}\tau(2 J_2 - 3\varkappa J_3 + \varkappa J_4 + \varkappa^2 J_5 - \varkappa^2 J_6),\\
A_4 &= \frac{\alpha}{a^3}\tau(J_3 + J_4 - \varkappa J_5 - \varkappa J_6),\\
A_5 &= \frac{\alpha^2}{a^3}(-J_2 + 2\varkappa J_3 - \varkappa^2 J_5),\\
A_6 &= \frac{1}{a^2}\varkappa\tau(-J_4 + 2\varkappa J_6 - \varkappa^2 J_7),\\
A_7 &= \frac{1}{a^2}\left[\varkappa J_2 - (\tau^2 + 2\varkappa^2) J_3 + \varkappa(\varkappa^2 + \tau^2) J_5 - \varkappa\tau^2 J_6 + \varkappa^2 \tau^2 J_7\right],\\
A_8 &= \frac{\alpha}{a^3}(-J_2 + 3\varkappa J_3 - 3\varkappa^2 J_5 + \varkappa^3 J_8),\\
A_9 &= \frac{\alpha\tau}{a^3}\cdot(2 J_3 + 3\varkappa J_5 - \varkappa J_6 + \varkappa^2 J_7 - \varkappa^2 J_8),\\
A_{10} &= \frac{\alpha\tau}{a^4}\cdot(-J_5 - J_6 + \varkappa J_7 + \varkappa J_8),\\
A_{11} &= \frac{\alpha^2}{a^4}\cdot(J_3 - 2\varkappa J_5 + \varkappa^2 J_8),\\
A_{12} &= \frac{\tau}{a^2}\left[-\varkappa J_3 - \varkappa J_4 + (\varkappa^2 + \tau^2) J_5 + (\varkappa^2 + \tau^2) J_6 + \varkappa\tau^2 J_7 + \varkappa\tau^2 J_8 + \varkappa\frac{G\,K}{E}\right],\\
A_{13} &= \frac{\alpha\tau}{a^3}(J_3 + J_4 - 2\varkappa J_5 - 2\varkappa J_6 + \varkappa^2 J_7 + \varkappa^2 J_8),\\
A_{14} &= \frac{\alpha}{a^3}\left(2\tau^2 J_5 + 2\tau^2 J_6 - \varkappa\tau^2 J_8 + \varkappa\tau^2 J_9 + \varkappa\frac{G\,K}{E}\right),\\
A_{15} &= \frac{\alpha}{a^4}\left(2\tau^2 J_7 + \tau^2 J_8 + \tau^2 J_9 + \frac{G\,K}{E}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

in der Form

$$N = a\,E\left(A_1\,\mathring{v} + A_2\frac{d\mathring{u}}{d\varrho} + A_3\frac{d\mathring{w}}{d\varrho} + A_4\,a\frac{d\mathring{\vartheta}}{d\varrho} + A_5\frac{d^2\mathring{v}}{d\varrho^2}\right), \tag{44.1}$$

$$M_H = a^2\,E\,A_6\left(\mathring{u} - \omega\,\mathring{w} - \frac{a}{\omega\,\alpha^2}\mathring{\vartheta} + \frac{2}{\alpha}\frac{d^2\mathring{v}}{d\varrho^2} + \frac{1}{\omega\,\alpha^2}\frac{d^2\mathring{w}}{d\varrho^2}\right), \tag{44.2}$$

$$M_B = a^2\,E\left(A_7\,\mathring{v} + A_8\frac{d\mathring{u}}{d\varrho} + A_9\frac{d\mathring{w}}{d\varrho} + A_{10}\,a\frac{d\mathring{\vartheta}}{d\varrho} + A_{11}\frac{d^2\mathring{v}}{d\varrho^2}\right), \tag{44.3}$$

$$M_T = a^2\,E\left(A_{12}\,\mathring{v} + A_{13}\frac{d\mathring{u}}{d\varrho} + A_{14}\frac{d\mathring{w}}{d\varrho} + A_{15}\,a\frac{d\mathring{\vartheta}}{d\varrho} + A_{10}\frac{\alpha\,d^2\mathring{v}}{d\varrho^2}\right). \tag{44.4}$$

Nach Elimination von $\mathring{u}$ und ϑ ergeben sich mit den dimensionslosen Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}
B_1 &= -\frac{A_8 + \omega\,\alpha^2\,A_{10}}{A_2 + \omega\,\alpha^2\,A_4}\,, & B_2 &= A_7 + B_1\,A_1\,,\\
B_3 &= -\frac{1}{\omega\,\alpha^2}\,(A_3 + B_1\,A_2)\,, & B_4 &= \frac{\omega\,\alpha^2\,B_3}{A_6}\,,\\
B_5 &= -\frac{A_{13} + \omega\,\alpha^2\,A_{15}}{A_2 + \omega\,\alpha^2\,A_4}\,, & B_6 &= A_{12} + B_5\,A_1\,,\\
B_7 &= \frac{1}{\omega\,\alpha^2}\,(A_{13} + B_5\,A_2)\,, & B_8 &= \omega\,\alpha^2\,\frac{B_7}{A_6}\,,\\
B_9 &= \omega\,A_{13} + A_{14} + B_5\,(\omega\,A_2 + A_3)\,,\\
B_{10} &= \frac{1}{\alpha}\,[-2\,A_{13} + \alpha^2\,A_{10} + B_5\,(-2\,A_2 + \alpha\,A_5)]\,,\\
B_{11} &= \omega\,A_8 + A_9 + B_1\,(\omega\,A_2 + A_3)\,,\\
B_{12} &= \frac{1}{\alpha^2}\,[-2\,\alpha\,A_8 + \alpha^2\,A_{11} + B_1\,(-2\,A_2 + \alpha\,A_5)]\,,
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

zwei Differentialgleichungen für $\mathring{v}$ und $\mathring{w}$. Sie lauten

$$\left.\begin{aligned}
E\mathring{v}\,B_2 + E\frac{d\mathring{w}}{d\varrho}\,B_{11} + E\frac{d^2\mathring{v}}{d\varrho^2}\,B_{12} + E\frac{d^3\mathring{w}}{d\varrho^3}\,B_3 &= \frac{dM_H}{d\varrho}\,\frac{B_4}{a^2} + N\,\frac{B_1}{a} + \frac{M_B}{a^2}\,,\\
E\mathring{v}\,B_6 + E\frac{d\mathring{w}}{d\varrho}\,B_9 + E\frac{d^2\mathring{v}}{d\varrho^2}\,B_{10} + E\frac{d^3\mathring{w}}{d\varrho^3}\,B_7 &= \frac{dM_H}{d\varrho}\,\frac{B_8}{a^2} + N\,\frac{B_5}{a} + \frac{M_T}{a^2}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Die simultanen Differentialgleichungen (46) lassen sich durch Elimination von $\mathring{w}$ auf eine Differentialgleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für $\mathring{v}$ zurückführen. Man erhält unter Berücksichtigung der Beziehungen, die zwischen den einzelnen Koeffizienten B nach (45) bestehen, die Differentialgleichung

$$E\frac{d^4\mathring{v}}{d\varrho^4} + 2\,E\frac{d^2\mathring{v}}{d\varrho^2} + E\mathring{v} = \frac{dM_H}{d\varrho}\,\frac{K_1}{a^2} + \frac{d^2N}{d\varrho^2}\,\frac{K^2}{a} + \frac{d^2M_B}{d\varrho^2}\,\frac{K_4}{a^2} + N\,\frac{K_3}{a} + M_B\,\frac{K_5}{a^2} + \frac{d^2M_T}{d\varrho^2}\,\frac{K_6}{a^2} + M_T\,\frac{K_7}{a^2}\,. \tag{47}$$

Die in (47) eingeführten Abkürzungen K haben die nachstehende Bedeutung:

$$\left.\begin{aligned}
K_1 &= \frac{2\,\omega^2\,\alpha^3}{A_6}\,, & K_2 &= \frac{B_3\,B_5 - B_1\,B_7}{B_3\,B_{10} - B_7\,B_{12}}\,,\\
K_3 &= \frac{B_5\,B_{11} - B_1\,B_9}{\alpha\,(B_3\,B_{10} - B_7\,B_{12})}\,, & K_4 &= -\frac{B_7}{B_3\,B_{10} - B_7\,B_{12}}\,,\\
K_5 &= \frac{B_9}{B_3\,B_{10} - B_7\,B_{12}}\,, & K_6 &= \frac{B_3}{B_3\,B_{10} - B_7\,B_{12}}\,,\\
& & K_7 &= \frac{B_{11}}{B_3\,B_{10} - B_7\,B_{12}}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Die Lösung der Differentialgleichung (46) ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
\mathring{v} = \frac{1}{2\,a^2\,E}\Big\{ & K_1 \int_0^\varrho M_H\,(\varrho - \lambda)\,\sin(\varrho - \lambda)\,d\lambda\\
& + \int_0^\varrho [N\,a\,(K_2 - K_3) + M_B\,(K_4 - K_5) + M_T\,(K_6 - K_7)]\,(\varrho - \lambda)\cos(\varrho - \lambda)\,d\lambda\\
& + \int_0^\varrho [N\,a\,(K_2 + K_3) + M_B\,(K_4 + K_5) + M_T\,(K_6 + K_7)]\,\sin(\varrho - \lambda)\,d\lambda\Big\}\\
& + \mathring{v}_0\cos\varrho + \alpha\,(-\mathring{u}_0 + \omega\,\mathring{w}_0 + a\,\varphi_0 + a\,\omega\,\vartheta_0)\sin\varrho + \omega\,a\,\alpha\,(\omega\,\varphi_0 - \vartheta_0)\,\varrho\cos\varrho\\
& - a\,\omega\,\psi_0\,\varrho\sin\varrho\,.
\end{aligned} \tag{49.1}$$

Führt man noch die Abkürzungen

$$K_8 = \frac{A_2}{\alpha^2\,(A_2 + \omega\,\alpha^2\,A_4)}\,, \qquad K_9 = \frac{2\,\omega^2\,\alpha\,A_5}{A_2 + \omega\,\alpha^2\,A_4}\,, \qquad K_{10} = \frac{\omega\,\alpha^3}{A_2 + \omega\,\alpha^2\,A_4}\,, \tag{50}$$

ein, so werden die anderen Verformungsgrößen erhalten.

$$
\begin{aligned}
\dot{w} = \frac{1}{2\,a^2 E}\Big\{ & \omega\,\alpha\,K_1 \int_0^\varrho M_H\,(\varrho-\lambda)\cos(\varrho-\lambda)\,d\lambda \\
& - \omega\,\alpha \int_0^\varrho [N\,a\,(K_2-K_3) + M_B\,(K_4-K_5) + M_T\,(K_6-K_7)]\,(\varrho-\lambda)\sin(\varrho-\lambda)\,d\lambda \\
& + \frac{\alpha}{\omega}\,K_1 \int_0^\varrho M_H \sin(\varrho-\lambda)\,d\lambda + \frac{(1-\omega^2)\,\alpha}{\omega} \int_0^\varrho [N\,a\,K_3 + M_B\,K_5 + M_T\,K_7]\,[1-\cos(\varrho-\lambda)]\,d\lambda \\
& - \frac{1}{\alpha\,\omega} \int_0^\varrho [N\,a\,K_2 + M_B\,K_4 + M_T\,K_6]\,[1-\cos(\varrho-\lambda)\,d\lambda]\Big\} - \omega\,\alpha\,\mathring{v}_0 \sin\varrho \\
& + \omega\,\alpha^2\,[-\mathring{u}_0 + \omega\,\mathring{w}_0 + a\,\varphi_0 + a\,\omega\,\vartheta_0]\cos\varrho + a\,\alpha^2\,(\omega\,\varphi_0 - \vartheta_0)\,(-\omega^2\,\varrho\sin\varrho + \cos\varrho) \\
& - a\,\alpha\,\psi_0\,(\omega^2\,\varrho\cos\varrho + \sin\varrho) + \alpha^2\,[\omega\,\mathring{u}_0 + \mathring{w}_0 - 2\,a\,\omega\,\varphi_0 + a\,(1-\omega^2)\,\vartheta_0]\,, \qquad (49.2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\vartheta} = \frac{1}{2\,\omega\,a^3 E}\Big\{ & - K_1 \int_0^\varrho M_H \sin(\varrho-\lambda)\,d\lambda - \alpha \int_0^\varrho [N\,a\,(K_2-K_3) + M_B\,(K_4-K_5) + M_T\,(K_6-K_7)] \\
& \times \cos(\varrho-\lambda)\,d\lambda + \alpha\,(K_8-1) \int_0^\varrho [N\,a\,K_3 + M_B\,K_5 + M_T\,K_7]\,d\lambda \\
& + \alpha\,[1-\alpha^2\,(1-\omega^2)\,K_8 - K_9] \int_0^\varrho [N\,a\,K_2 + M_B\,K_4 + M_T\,K_6]\,d\lambda\Big\} \\
& + \frac{K_{10}}{a^2\,\alpha\,E} \int_0^\varrho N\,d\lambda - \alpha^2\,(\omega\,\varphi_0 - \vartheta_0)\cos\varrho + \alpha\,\psi_0 \sin\varrho + \omega\,\alpha^2\,(\omega\,\vartheta_0 + \psi_0)\,, \qquad (49.3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{u} = \frac{1}{2\,a^2 E}\Big\{ & - \alpha\,K_1 \int_0^\varrho M_H\,(\varrho-\lambda)\cos(\varrho-\lambda)\,d\lambda \\
& + \alpha \int_0^\varrho [N\,a\,(K_2-K_3) + M_B\,(K_4-K_5) + M_T\,(K_6-K_7)]\,(\varrho-\lambda)\sin(\varrho-\lambda)\,d\lambda \\
& + \alpha\,K_1 \int_0^\varrho M_H \sin(\varrho-\lambda)\,d\lambda - 2\,\alpha \int_0^\varrho [N\,a\,K_3 + M_B\,K_5 + M_T\,K_7]\cos(\varrho-\lambda)\,d\lambda \\
& + \frac{-\alpha^2\,(1+\omega^4) + K_8}{\alpha\,\omega^2} \int_0^\varrho [N\,a\,K_3 + M_B\,K_5 + M_T\,K_7]\,d\lambda \\
& + \frac{1}{\alpha\,\omega^2}\,[(1-\omega^2)\,(1-\alpha^2\,K_8) - K_9] \int_0^\varrho [N\,a\,K_2 + M_B\,K_4 + M_T\,K_6]\,d\lambda\Big\} \\
& + \frac{K_{10}}{a\,\omega\,\alpha^3 E} \int_0^\varrho N\,d\lambda + \alpha\,\mathring{v}_0 \sin\varrho - \alpha^2\,[-\mathring{u}_0 + \omega\,\mathring{w}_0 + a\,\varphi_0 + a\,\omega\,\vartheta_0]\cos\varrho \\
& + a\,\omega\,\alpha^2\,(\omega\,\varphi_0 - \vartheta_0)\,(\varrho\sin\varrho + \cos\varrho) - a\,\omega\,\alpha\,\psi_0\,(-\varrho\cos\varrho + \sin\varrho) \\
& + \omega\,\alpha^2\,[\omega\,\mathring{u}_0 + \mathring{w}_0 - 2\,a\,\omega\,\varphi_0 + a\,(1-\omega^2)\,\vartheta_0] + a\,(\omega\,\vartheta_0 + \varphi_0)\,, \qquad (49.4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi = \frac{1}{2\,a^3\,\omega\,E}\Big\{ & - K_1 \int_0^\varrho M_H \cos(\varrho-\lambda)\,d\lambda \\
& + \int_0^\varrho [N\,a\,(K_2-K_3) + M_B\,(K_4-K_5) + M_T\,(K_6-K_7)]\sin(\varrho-\lambda)\,d\lambda\Big\} \\
& + \alpha\,(\omega\,\varphi_0 - \vartheta_0)\sin\varrho + \psi_0\cos\varrho\,, \qquad (49.5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi = \frac{\alpha}{2\,a^3 E}\Big\{ & K_1 \int_0^\varrho M_H \sin(\varrho-\lambda)\,d\lambda + \int_0^\varrho [N\,a\,(K_2-K_3) + M_B\,(K_4-K_5) + M_T\,(K_6-K_7)] \\
& \times \cos(\varrho-\lambda)\,d\lambda + \frac{(K_8-1)}{\omega^2} \int_0^\varrho [N\,a\,K_3 + M_B\,K_5 + M_T\,K_7]\,d\lambda \\
& + \frac{1}{\omega^2}\,[1-\alpha^2\,(1-\omega^2)\,K_8 - K_9] \int_0^\varrho [N\,a\,K_2 + M_B\,K_4 + M_T\,K_6]\,d\lambda\Big\} \\
& + \frac{K_{10}}{a^2\,\alpha\,\omega\,E} \int_0^\varrho N\,d\lambda + \omega\,\alpha^2\,(\omega\,\varphi_0 - \vartheta_0)\cos\varrho - \omega\,\alpha\,\psi_0 \sin\varrho + \alpha^2\,(\omega\,\vartheta_0 + \varphi_0)\,. \qquad (49.6)
\end{aligned}
$$

Damit ist auch der statisch unbestimmte Fall gelöst. Die Gleichungen (42) und (49) enthalten die den Integrationskonstanten entsprechenden zwölf Randwerte

$$\mathring{N},\ \mathring{Q}_\Pi,\ \mathring{Q}_B,\ \mathring{M}_T,\ \mathring{M}_\Pi,\ \mathring{M}_B,\ \mathring{u}_0,\ \mathring{v}_0,\ \mathring{w}_0,\ \mathring{\vartheta}_0,\ \mathring{\psi}_0,\ \mathring{\varphi}_0\,.$$

Zu ihrer Berechnung stehen im allgemeinen Falle (es sind keine Randkräfte oder Randmomente bekannt) die sechs Gleichungen (49) zur Verfügung. Der Träger ist sechsfach statisch unbestimmt. Der Stützungsart entsprechend können jedoch schon verschiedene Schnittkräfte am Rande $\varrho = 0$ bekannt sein. Dann erniedrigt sich der Grad der statischen Unbestimmtheit um die Anzahl der bekannten Randwerte.

Sind die unbekannten Schnittkräfte bzw. Verschiebungen bekannt, so folgt die Spannung $\sigma = \sigma(\mathring{s}, \xi, \eta)$ an jeder beliebigen Stelle des Stabes nach (24) mit (18).

8. Zusammenfassung. Für einen Träger, dessen Stabachse nach einer beliebigen Raumkurve verläuft, werden die Beziehungen zwischen den Verformungen und den Dehnungen abgeleitet. Die Krümmung und Windung jeder einzelnen Faser des Stabes sind dabei berücksichtigt. Dem Verformungszustand wird konsequent die *Bernoulli*sche Hypothese ebenbleibender Querschnitte zugrunde gelegt und der Querkrafteinfluß vernachlässigt. Das Problem der Berechnung eines beliebig gekrümmten Stabes ist somit auf die Integration eines Systems von sechs linearen Differentialgleichungen zurückgeführt. Für die gewöhnliche Schraubenlinie gelingt es, das Differentialgleichungssystem durch eine Differentialgleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu ersetzen. Der Spannungs- und Verschiebungszustand kann als Funktion der Belastung explizit angegeben werden. Der über dem Querschnitt aufgetragene Spannungshügel stellt keine Ebene, sondern eine gekrümmte Fläche dar.

(Eingegangen am 5. November 1958.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Günter Kämmel*, Freiberg (Sachsen), Beuststr. 7.

Der Wellenwiderstand von Schiffen auf flachem Wasser

Von F. Kolberg

1. Einleitung. Seit *Lambs*[1] Untersuchung des Einflusses der Zähigkeit auf freie Wasserwellen sind von verschiedenen Forschern (*Havelock*, *Wigley*, *Inui*) Arbeiten erschienen, welche den Zähigkeitseinfluß auf den Wellenwiderstand von Schiffen zu berücksichtigen versuchen. Die dort gemachten Vorschläge zur Erfassung der Zähigkeitseinflüsse sind halbempirischer Natur. Erst *Srétensky*[2] gelang zunächst für unendlich tiefes Wasser bei Linearisierung der zum Problem gehörigen Differentialgleichungen und Randbedingungen unter der Annahme, daß die freie Oberfläche keine Tangentialspannungen aufweist, die Angabe von Formeln zur Berechnung des Wellenwiderstandes und der Wasseroberfläche unter Berücksichtigung der Zähigkeit bei der stationären Bewegung von Schiffskörpern an der Wasseroberfläche. Im folgenden beschäftigen wir uns mit der Erweiterung der Formeln von *Srétensky* auf flaches Wasser, wobei wir unter Annahme der *Srétensky*schen Grundkonzeption auf die Herleitung der Randbedingungen an der freien Oberfläche sowie die Aufstellung der Lösung des betreffenden Differentialgleichungssystems ausführlich eingehen.

Bei unserer Herleitung der Formeln für Flachwasser sind zusätzlich zu *Srétensky* die Randbedingungen am Flachwasserboden zu berücksichtigen. Wir verlangen, daß am Flachwasserboden die Komponenten der Störungsgeschwindigkeiten verschwinden.

Einerseits untersuchen wir die Wellenbewegung, die durch Normaldrücke auf die freie Oberfläche (*Hogner*sches Drucksystem) erzeugt wird, und berechnen den Widerstand dieses Normaldrucksystems sowohl im ebenen wie im dreidimensionalen Fall; zum anderen ersetzen wir das Schiff durch eine Quellsenkenbelegung der Mittschiffsebene und berechnen analog zu *Michell* den Druckwiderstand. Zu beachten ist hierbei, daß die gefundene Formel für den Wellenwiderstand die Bedingungen für zähe Flüssigkeiten, die sich auf die Schiffsoberfläche selbst beziehen, nicht berücksichtigt.

2. Differentialgleichung des Problems und Lösungsmethode. Wir beziehen uns auf ein fest mit dem Schiff verbundenes kartesisches Koordinatensystem (x, y, z), dessen x-Achse in Bewegungsrichtung und dessen z-Achse senkrecht nach oben weise. Ist c die konstante Geschwindigkeit des Schiffes, und sind u, v, w die Störungsgeschwindigkeiten in x-, y-, z-Richtung, und ist p' der Druck, so wird unser Problem beschrieben durch die *Navier-Stokes*schen Differentialgleichungen und die Kontinuitätsbedingung:

$$\left.\begin{aligned}(c+u)\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p'}{\partial x}+\nu\,\Delta u\,,\\ (c+u)\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p'}{\partial y}+\nu\,\Delta v\,,\\ (c+u)\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p'}{\partial z}+\nu\,\Delta w-g\,,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\,. \tag{2}$$

Linearisierung dieses Systems ergibt

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\nu}{c}\Delta u&=-\frac{1}{\varrho\,c}\frac{\partial p'}{\partial x},\\ \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\nu}{c}\Delta v&=-\frac{1}{\varrho\,c}\frac{\partial p'}{\partial y},\\ \frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\nu}{c}\Delta w&=-\frac{1}{\varrho\,c}\frac{\partial p'}{\partial z}-\frac{g}{c},\end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\,. \tag{2'}$$

[1] *H. Lamb*, Hydrodynamics, 6. Aufl. 1932.

[2] *L.-N. Srétensky*, Sur la résistance due aux vagues d'un fluide visqueux, Proceedings Symposium on the behaviour of ships in a seaway, Wageningen (1957).

Die Lösung unseres Problems setzen wir nun in der Form

$$u = u_1 + u_2\,, \quad v = v_1 + v_2\,, \quad w = w_1 + w_2\,, \quad p' = p - \varrho\, g\, z$$

an, wo u_1, v_1, w_1, p dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= -\frac{1}{\varrho\, c}\frac{\partial p}{\partial x}, & \Delta u_1 &= 0\,, \\ \frac{\partial v_1}{\partial x} &= -\frac{1}{\varrho\, c}\frac{\partial p}{\partial y}, & \Delta v_1 &= 0\,, \\ \frac{\partial w_1}{\partial x} &= -\frac{1}{\varrho\, c}\frac{\partial p}{\partial z}\,, & \Delta w_1 &= 0\,, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} &= 0\,, & \Delta p &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

genügen sollen. Führt man ein Potential Φ ein und setzt

$$p = c\,\varrho\,\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,, \tag{4}$$

wo also $\Delta\Phi = 0$ ist, so erhält man nach (3) für die Geschwindigkeiten

$$u_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,, \qquad v_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}\,, \qquad w_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}\,. \tag{5}$$

Die Geschwindigkeitskomponenten u_2, v_2, w_2 müssen dann dem Differentialgleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\nu}{c}\,\Delta u_2 &= 0\,, \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\nu}{c}\,\Delta v_2 &= 0\,, \\ \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\nu}{c}\,\Delta w_2 &= 0\,, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

genügen.

3. Die Randbedingungen an der freien Oberfläche und am Flachwasserboden. Beachtet man die Formeln

$$p_{zz} = -p' + 2\,\varrho\,\nu\,\frac{\partial w}{\partial z}\,, \quad p_{zx} = \varrho\,\nu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad p_{zy} = \varrho\,\nu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \tag{7}$$

so lauten die Randbedingungen an der freien Oberfläche bei unseren Voraussetzungen über das Verschwinden der Tangentialspannungen an der freien Oberfläche, wenn $T(x, y)$ das auf die freie Oberfläche wirkende Normaldrucksystem und $z = \zeta(x, y)$ die Gleichung der freien Oberfläche ist,

$$\frac{D\,[p_{zz} - T(x, y)]}{Dt} = 0\,, \quad \frac{D\zeta}{Dt} = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{8}$$

für $z = \zeta(x, y)$. Die erste dieser Gleichungen ergibt bei Linearisierung unter Berücksichtigung der Gleichungen (7) und (1′) schließlich

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\nu}{c}\,\Delta u + \frac{2\,\nu}{c}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z} + \frac{g}{c^2}\,w = \frac{1}{\varrho\, c}\,\frac{\partial T}{\partial x} \qquad \text{für} \quad z = 0 \tag{9}$$

oder

$$\frac{2\,\nu}{c}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z} + \frac{g}{c^2}\,w = \frac{1}{\varrho\, c}\,\frac{\partial}{\partial x}(p + T) \quad \text{für} \quad z = 0\,. \tag{10}$$

Linearisierung der zweiten Gleichung (8) liefert nun

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{w}{c} \quad \text{für} \quad z = 0\,. \tag{11}$$

Aus (10) und (11) folgt durch Integration nach x für die Wasseroberfläche:

$$\zeta(x,y) = \left[\frac{1}{g\,\varrho}(p+T) - \frac{2\,\nu}{g}\frac{\partial w}{\partial z}\right]_{z=0}, \tag{12}$$

wobei beachtet wurde, daß für $x \to \infty$ die Werte von p, T und $\partial w/\partial z$ gegen Null streben.

Am Flachwasserboden $z = -h$ sind die Randbedingungen

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0 \tag{13}$$

zu erfüllen.

Zusammenfassend haben wir also als Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0\,, \\ &\frac{2\,\nu}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z} + \frac{g}{c^2}w = \frac{1}{\varrho\,c}\frac{\partial}{\partial x}(p+T)\,, \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad z = 0\,, \tag{14}$$

wo für ein *Michell*sches Schiff $T = 0$ zu setzen ist, und

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0 \quad \text{für} \quad z = -h\,. \tag{15}$$

4. Darstellung der Lösung, Berechnung des Widerstandes und Aufstellung der Gleichung für die freie Wasseroberfläche.

a) *Michell*sches Schiff. Ersetzt man das Schiff durch eine Quellsenkenbelegung der Dichte $\sigma(x,z)$ auf der Mittschiffsebene, so wird man in bekannter Weise[1] für das Potential Φ auf den Ansatz

$$\Phi(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_S\int \sigma(\xi,\zeta)\left(\frac{1}{r_{\mathrm{I}}} + \frac{1}{r_{\mathrm{II}}}\right)d\xi\,d\zeta + \frac{1}{2\pi}\int_S\int \sigma(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta \int_{-\pi}^{\pi} d\Theta \int_0^{\infty}$$

$$\exp\{i\,K\,[(x-\xi)\cos\Theta + y\sin\Theta]\}\,\{F_1\,\mathfrak{Cof}\,[K\,(z+h)] + F_2\,\mathfrak{Sin}\,[K\,(z+h)]\}\,dK$$

geführt, wo

$$r_{\mathrm{I}}^2 = (x-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2\,, \qquad r_{\mathrm{II}}^2 = (x-\xi)^2 + y^2 + (z+2\,h+\zeta)^2$$

ist. Für $z-\zeta > 0$ und $z+2\,h+\zeta > 0$ haben wir hierfür die Integraldarstellung

$$\Phi = \frac{1}{2\pi}\int_S\int \sigma(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta \int_{-\pi}^{\pi} d\Theta \int_0^{\infty} \exp\{i\,K\,[(x-\xi)\cos\Theta + y\sin\Theta]\}$$

$$\times\,\{2\exp[-K\,(z+h)]\,\mathfrak{Cof}\,[K\,(h+\zeta)] + F_1\,\mathfrak{Cof}\,[K\,(z+h)] + F_2\,\mathfrak{Sin}\,[K\,(z+h)]\,dK\,. \tag{16}$$

Partikuläre Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\nu}{c}\,\Delta f = 0 \qquad \text{mit} \qquad \Delta f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

sind

$$f_1 = \exp[i\,K\,(x\cos\Theta + y\sin\Theta)]\,\mathfrak{Cof}\,[m\,(z+h)]\,,$$

$$f_2 = \exp[i\,K\,(x\cos\Theta + y\sin\Theta)]\,\mathfrak{Sin}\,[m\,(z+h)]$$

mit

$$m^2 = K^2 + \frac{i\,c\,K\cos\Theta}{\nu}\,.$$

[1] *J. K. Lunde*, Trans. Soc. Nav. Arch. Mar. Eng., 59 (1951) S. 25—76.

Für die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w erhalten wir jetzt unter Berücksichtigung der Kontinuitätsbedingung für $z-\zeta<0$ und $z+2h+\zeta>0$ den Ansatz

$$
\left.\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2\pi}\int_S\int \sigma(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta \int_{-\pi}^{\pi} d\Theta \int_0^{\infty} \exp\{i K[(x-\xi)\cos\Theta + y\sin\Theta]\} \\
&\times \{-i K\cos\Theta[\exp[K(z-\zeta)] + \exp[-K(z+2h+\zeta)] + F_1 \mathfrak{Cof}[K(z+h)] \\
&+ F_2 \mathfrak{Sin}[K(z+h)]] + F_3 \mathfrak{Cof}[m(z+h)] + F_4 \mathfrak{Sin}[m(z+h)]\}\,dK, \\
v &= \frac{1}{2\pi}\int_S\int \sigma(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta \int_{-\pi}^{\pi} d\Theta \int_0^{\infty} \exp[i K\{(x-\xi)\cos\Theta + y\sin\Theta\}] \\
&\times \{-i K\sin\Theta\{\exp[K(z-\zeta)] + \exp[-K(z+2h+\zeta)] + F_1 \mathfrak{Cof}[K(z+h)] \\
&+ F_2 \mathfrak{Sin}[K(z+h)]\} + F_5 \mathfrak{Cof}[m(z+h)] + F_6 \mathfrak{Sin}[m(z+h)]\}\,dK, \\
w &= \frac{1}{2\pi}\int_S\int \sigma(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta \int_{-\pi}^{\pi} d\Theta \int_0^{\infty} \exp[i K\{(x-\xi)\cos\Theta + y\sin\Theta\}] \\
&\times \{K\{-\exp[K(z-\zeta)] + \exp[-K(z+2h+\zeta)] - F_1 \mathfrak{Sin}[K(z+h)] \\
&- F_2 \mathfrak{Cof}[K(z+h)]\} - \frac{iK}{m}(\{F_3\cos\Theta + F_5\sin\Theta\}\mathfrak{Sin}[m(z+h)] \\
&+ \{F_4\cos\Theta + F_6\sin\Theta\}\mathfrak{Cof}[m(z+h)])\}\,dK.
\end{aligned}\right\} \tag{17}
$$

Mittels der Randbedingungen (15) am Flachwasserboden können wir drei der im Ansatz (17) auftretenden Funktionen F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6 eliminieren, und es ergibt sich für $z-\zeta>0$ und $z+2h+\zeta>0$ für die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w der Lösungsansatz

$$
\left.\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2\pi}\int_S\int \sigma(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta \int_{-\pi}^{\pi} d\Theta \int_0^{\infty} \exp[i K\{(x-\xi)\cos\Theta + y\sin\Theta\}] \\
&\times \{2 i K\cos\Theta\{\exp[-K(h+\zeta)]\,\mathfrak{Cof}[m(z+h)] - \mathfrak{Cof}[K(h+\zeta)] \\
&\times \exp[-K(z+h)]\} + i K\cos\Theta\{-\mathfrak{Cof}[K(z+h)] + \mathfrak{Cof}[m(z+h)]\} \\
&\times F_1^* - i K\cos\Theta\,\mathfrak{Sin}[K(z+h)]\,F_2^* + \mathfrak{Sin}[m(z+h)]\,F_3^*\}\,dK, \\
v &= \frac{1}{2\pi}\int_S\int \sigma(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta \int_{-\pi}^{\pi} d\Theta \int_0^{\infty} \exp[i K\{(x-\xi)\cos\Theta + y\sin\Theta\}] \\
&\times \{2 i K\sin\Theta\{\exp[-K(h+\zeta)]\,\mathfrak{Cof}[m(z+h)] - \mathfrak{Cof}[K(h+\zeta)] \\
&\times \exp[-K(z+h)]\} + i K\sin\Theta\{-\mathfrak{Cof}[K(z+h)] + \mathfrak{Cof}[m(z+h)]\} \\
&\times F_1^* + \{-i K\sin\Theta\,\mathfrak{Sin}[K(z+h)] + \frac{i m}{\sin\Theta}\mathfrak{Sin}[m(z+h)]\} \\
&\times F_2^* - \frac{\cos\Theta}{\sin\Theta}\mathfrak{Sin}[m(z+h)]\,F_3^*\}\,dK, \\
w &= \frac{1}{2\pi}\int_S\int \sigma(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta \int_{-\pi}^{\pi} d\Theta \int_0^{\infty} \exp[i K\{(x-\xi)\cos\Theta + y\sin\Theta\}] \\
&\times \{2 K\{\mathfrak{Cof}[K(h+\zeta)]\exp[-K(z+h)] + \frac{K}{m}\exp[-K(h+\zeta)] \\
&\times \mathfrak{Sin}[m(z+h)]\} + K\{-\mathfrak{Sin}[K(z+h)] + \frac{K}{m}\mathfrak{Sin}[m(z+h)]\} \\
&\times F_1^* + K\{-\mathfrak{Cof}[K(z+h)] + \mathfrak{Cof}[m(z+h)]\}\,F_2^*\}\,dK.
\end{aligned}\right\} \tag{17'}
$$

Durch die drei Randbedingungen (14) an der Wasseroberfläche sind die hier auftretenden Funktionen F_1^*, F_2^*, F_3^* bestimmt. Damit kennen wir alle interessierenden Größen. Nach (12) erhalten wir die Gleichung der freien Oberfläche zu

$$\begin{aligned}\zeta(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_S\int \sigma(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta \int_{-\pi}^{\pi} d\Theta \int_0^{\infty} \exp\left[i\,K\{(x-\xi)\cos\Theta + y\sin\Theta\}\right] \\ \times \left[\mathfrak{Cof}\left[K(h+\zeta)\right] m\{2\,\nu\,K\,\mathfrak{Cof}\left[K\,h\right] - (2\,\nu\,K + i\,c\cos\Theta)\,\mathfrak{Cof}\left[m\,h\right]\}\right. \\ \left. - \mathfrak{Sin}\left[K(h+\zeta)\right] K\{2\,\nu\,m\,\mathfrak{Sin}\left[K\,h\right] - (2\,\nu\,K + i\,c\cos\Theta)\,\mathfrak{Sin}\left[m\,h\right]\}\right]\frac{K}{\Delta}\,dK\,, \end{aligned} \tag{18}$$

mit

$$\begin{aligned}\Delta = {} & 4\,\nu\,K^2\,m\{2\,\nu\,K + i\,c\cos\Theta\} + g\{K\,\mathfrak{Cof}\left[K\,h\right]\mathfrak{Sin}\left[m\,h\right] - m\,\mathfrak{Sin}\left[K\,h\right]\mathfrak{Cof}\left[m\,h\right]\} \\ & + K\{2\,\nu\,K + i\,c\cos\Theta\}^2\{K\,\mathfrak{Sin}\left[K\,h\right]\mathfrak{Sin}\left[m\,h\right] - m\,\mathfrak{Cof}\left[K\,h\right]\mathfrak{Cof}\left[m\,h\right]\} \\ & - 4\,\nu^2\,K^2\,m\{K\,\mathfrak{Cof}\left[K\,h\right]\mathfrak{Cof}\left[m\,h\right] - m\,\mathfrak{Sin}\left[K\,h\right]\mathfrak{Sin}\left[m\,h\right]\}\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Der Druckwiderstand ist hier nach der Formel

$$R = -2\int_S\int p(x,0,z)\,\frac{\partial y}{\partial x}\,dx\,dz$$

zu berechnen.

Beachtet man, daß nach (4)

$$\begin{aligned} p(x,0,z) = c\,\varrho\,\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big|_{y=0} = \frac{\varrho}{2\pi}\int_S\int \sigma(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta \int_{-\pi}^{\pi} d\Theta \int_0^{\infty} \exp\left[i\,K\,(x-\xi)\cos\Theta\right] i\,c\,K\cos\Theta \\ \times\{\exp\left[-K(z+\zeta)\right] + \exp\left[-K(z+2h+\zeta)\right] + F_1^*\,\mathfrak{Cof}\left[K(z+h)\right] + F_2^*\,\mathfrak{Sin}\left[K(z+h)\right]\}\,dK \end{aligned} \tag{20}$$

ist, und daß man $\sigma(x,z) = -\frac{c}{2\pi}\frac{\partial y}{\partial x}$ hat, wenn $y = y(x,z)$ die Gleichung der Schiffsoberfläche ist, so erhält man für den Druckwiderstand schließlich

$$R = -4\,\varrho\,\mathrm{Im}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\Theta\,d\Theta\int_0^{\infty}\{m\,A\,(U^2+V^2) - 2\,K\,B\,(U\,I + V\,J) + K\,C\,(I^2+J^2)\}\frac{K}{\Delta}\,dK\,, \tag{21}$$

wobei wir folgende Abkürzungen eingeführt haben:

$$\left.\begin{aligned} A = {} & g\,\mathfrak{Cof}\left[K\,h\right]\mathfrak{Cof}\left[m\,h\right] + K\{2\,\nu\,K + i\,c\cos\Theta\}^2\,\mathfrak{Sin}\left[K\,h\right]\mathfrak{Cof}\left[m\,h\right] \\ & - 4\,\nu^2\,K^2\,m\,\mathfrak{Cof}\left[K\,h\right]\mathfrak{Sin}\left[m\,h\right], \\ B = {} & 2\,\nu\,K\,m\{2\,\nu\,K + i\,c\cos\Theta\} + g\,\mathfrak{Cof}\left[K\,h\right]\mathfrak{Sin}\left[m\,h\right] \\ & + K\{2\,\nu\,K + i\,c\cos\Theta\}^2\,\mathfrak{Sin}\left[K\,h\right]\mathfrak{Sin}\left[m\,K\right] - 4\,\nu^2\,K^2\,m\,\mathfrak{Cof}\left[K\,h\right]\mathfrak{Cof}\left[m\,h\right], \\ C = {} & g\,\mathfrak{Sin}\left[K\,h\right]\mathfrak{Sin}\left[m\,h\right] + K\{2\,\nu\,K + i\,c\cos\Theta\}^2\,\mathfrak{Cof}\left[K\,h\right]\mathfrak{Sin}\left[m\,h\right] \\ & - 4\,\nu^2\,K^2\,m\,\mathfrak{Sin}\left[K\,h\right]\mathfrak{Cof}\left[m\,h\right], \\ \Delta = {} & 4\,\nu\,K^2\,m\{2\,\nu\,K + i\,c\cos\Theta\} + g\{K\,\mathfrak{Cof}\left[K\,h\right]\mathfrak{Sin}\left[m\,h\right] - m\,\mathfrak{Sin}\left[K\,h\right]\mathfrak{Cof}\left[m\,h\right]\} \\ & + K\{2\,\nu\,K + i\,c\cos\Theta\}^2\{K\,\mathfrak{Sin}\left[K\,h\right]\mathfrak{Sin}\left[m\,h\right] - m\,\mathfrak{Cof}\left[K\,h\right]\mathfrak{Cof}\left[m\,h\right]\} \\ & - 4\,\nu^2\,K^2\,m\{K\,\mathfrak{Cof}\left[K\,h\right]\mathfrak{Cof}\left[m\,h\right] - m\,\mathfrak{Sin}\left[K\,h\right]\mathfrak{Sin}\left[m\,h\right]\}, \\ U + i\,V = {} & \iint_S \mathfrak{Cof}\left[K(h+z)\right]\exp\left[i\,K\cos\Theta\,x\right]\sigma(x,z)\,dx\,dz\,, \\ I + i\,J = {} & \iint_S \mathfrak{Sin}\left[K(h+z)\right]\exp\left[i\,K\cos\Theta\,x\right]\sigma(x,z)\,dx\,dz\,. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

b) *Hognersches* Drucksystem, dreidimensionaler Fall. Das auf die Wasseroberfläche wirkende Drucksystem sei dargestellt in der Form

$$T(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_S\int T(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\int_{-\infty}^{\infty}\int \exp\left[i\{k\,(\xi-x) + l\,(\eta-y)\}\right]dk\,dl\,. \tag{23}$$

Für das Potential Φ wird man auf den Ansatz

$$\Phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi^2}\int_S\int T(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \int_{-\infty}^{\infty}\int \exp\left[i\{k(\xi-x)+l(\eta-y)\}\right] \times F_1 \mathfrak{Cof}\left[m(z+h)\right] + F_2 \mathfrak{Sin}\left[m(z+h)\right]\} dk\,dl \tag{24}$$

geführt, wo $m^2 = k^2 + l^2$ ist. Partikuläre Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\nu}{c}\Delta f = 0 \qquad \text{mit} \qquad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

sind

$$f_1 = \exp\left[-i\{kx+ly\}\right]\mathfrak{Cof}\left[n(z+h)\right], \qquad f_2 = \exp\left[-i\{kx+ly\}\right]\mathfrak{Sin}\left[n(z+h)\right]$$

mit

$$n^2 = m^2 - \frac{ikc}{\nu}.$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w erhält man unter Berücksichtigung der Kontinuitätsbedingung den Ansatz

$$\left.\begin{aligned}
u &= \frac{1}{4\pi^2}\int_S\int T(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \int_{-\infty}^{\infty}\int \exp\left[i\{k(\xi-x)+l(\eta-y)\}\right]\{ik(F_1\mathfrak{Cof}\left[m(z+h)\right] \\
&\quad + F_2\mathfrak{Sin}\left[m(z+h)\right]) + F_3\mathfrak{Cof}\left[n(z+h)\right] + F_4\mathfrak{Sin}\left[n(z+h)\right]\}\,dk\,dl, \\
v &= \frac{1}{4\pi^2}\int_S\int T(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \int_{-\infty}^{\infty}\int \exp\left[i\{k(\xi-x)+l(\eta-y)\}\right]\{il(F_1\mathfrak{Cof}\left[m(z+h)\right] \\
&\quad + F_2\mathfrak{Sin}\left[m(z+h)\right]) + F_5\mathfrak{Cof}\left[n(z+h)\right] + F_6\mathfrak{Sin}\left[n(z+h)\right]\}\,dk\,dl, \\
w &= \frac{1}{4\pi^2}\int_S\int T(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \int_{-\infty}^{\infty}\int \exp\left[i\{k(\xi-x)+l(\eta-y)\}\right] \\
&\quad \Big\{-m(F_1\mathfrak{Sin}\left[m(z+h)\right] + F_2\mathfrak{Cof}\left[m(z+h)\right]) + \Big(\frac{ik}{n}F_3 + \frac{il}{n}F_5\Big)\mathfrak{Sin}\left[n(z+h)\right] \\
&\quad + \Big(\frac{ik}{n}F_4 + \frac{il}{n}F_6\Big)\mathfrak{Cof}\left[n(z+h)\right]\Big\}\,dk\,dl.
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Wieder können wir mittels der Randbedingungen (15) am Flachwasserboden drei der im Ansatz (25) auftretenden Funktionen F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6 eliminieren, und es ergibt sich für die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w der Lösungsansatz

$$\left.\begin{aligned}
u &= \frac{1}{4\pi^2}\int_S\int T(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \int_{-\infty}^{\infty}\int \exp\left[i\{k(\xi-x)+l(\eta-y)\}\right]\{ik(\mathfrak{Cof}\left[m(z+h)\right] \\
&\quad - \mathfrak{Cof}\left[n(z+h)\right])F_1^* + ik\,\mathfrak{Sin}\left[m(z+h)\right]F_2^* + \mathfrak{Sin}\left[n(z+h)\right]F_3^*\}\,dk\,dl, \\
v &= \frac{1}{4\pi^2}\int_S\int T(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \int_{-\infty}^{\infty}\int \exp\left[i\{k(\xi-x)+l(\eta-y)\}\right] \\
&\quad \times \Big\{il(\mathfrak{Cof}\left[m(z+h)\right] - \mathfrak{Cof}\left[n(z+h)\right])F_1^* \\
&\quad + il(\mathfrak{Sin}\left[m(z+h)\right] - \frac{mn}{l^2}\mathfrak{Sin}\left[n(z+h)\right])F_2^* - \frac{k}{l}\mathfrak{Sin}\left[n(z+h)\right]F_3^*\Big\}\,dk\,dl, \\
w &= \frac{1}{4\pi^2}\int_S\int T(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \int_{-\infty}^{\infty}\int \exp\left[i\{k(\xi-x)+l(\eta-y)\}\right] \\
&\quad \times \Big\{m\Big(-\mathfrak{Sin}\left[m(z+h)\right] + \frac{k^2+l^2}{mn}\mathfrak{Sin}\left[n(z+h)\right]\Big)F_1^* \\
&\quad + m(-\mathfrak{Cof}\left[m(z+h)\right] + \mathfrak{Cof}\left[n(z+h)\right])F_2^*\Big\}\,dk\,dl.
\end{aligned}\right\} \tag{25'}$$

Durch die drei Randbedingungen (14) an der freien Oberfläche sind die in diesem Ansatz auftretenden Funktionen F_1^*, F_2^*, F_3^* bestimmt. Die interessierenden Größen sind damit sämtlich bekannt. Nach (12) erhalten wir die Gleichung der freien Wasseroberfläche zu

$$\zeta(x, y) = \frac{1}{4\pi^2 \varrho} \int_S \int T(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \int \exp\left[i\{k(\xi - x) + l(\eta - y)\}\right] \times (m \operatorname{Cof}[m h] \operatorname{Sin}[n h] - n \operatorname{Sin}[m h] \operatorname{Cof}[n h]) \frac{m}{\Delta}\, dk\, dl \tag{26}$$

mit

$$m^2 = k^2 + l^2, \qquad n^2 = m^2 - \frac{i c k}{\nu}$$

und der Abkürzung

$$\Delta = 4\nu m^2 n\{2\nu m^2 - i k c\} + \{2\nu m^2 - i k c\}^2 \{m \operatorname{Sin}[m h] \operatorname{Sin}[n h] - n \operatorname{Cof}[m h] \operatorname{Cof}[n h]\} - 4\nu^2 m^3 n\{m \operatorname{Cof}[m h] \operatorname{Cof}[n h] - n \operatorname{Sin}[m h] \operatorname{Sin}[n h]\} + g m\{m \operatorname{Cof}[m h] \operatorname{Sin}[n h] - n \operatorname{Sin}[m h] \operatorname{Cof}[n h]\}. \tag{26'}$$

Der Druckwiderstand ist nach der Formel

$$R = -\int_S \int T(x, y) \frac{\partial \zeta}{\partial x}\, dx\, dy$$

zu berechnen, wo $\zeta(x, y)$ aus (26) zu entnehmen ist. Damit wird

$$R = -\frac{1}{4\pi\varrho} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int (U^2 + V^2)(m \operatorname{Cof}[m h] \operatorname{Sin}[n h] - n \operatorname{Sin}[m h] \operatorname{Cof}[n h]) \frac{k m}{\Delta}\, dk\, dl, \tag{27}$$

wenn wieder die Abkürzungen

$$U + i V = \iint_S T(x, y) \exp[i(k x + l y)]\, dx\, dy \tag{28}$$

eingeführt werden.

c) *Hognersches* Drucksystem, ebener Fall. Hier ist $\nu = 0$ und die Abhängigkeit von y entfällt. Ist das auf die Wasseroberfläche wirkende Drucksystem dargestellt in der Form

$$T(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S T(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i k (x - \xi)]\, dk,$$

so wird man für das Potential Φ auf den Ansatz

$$\Phi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_S T(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i k (x - \xi)]\{F_1 \operatorname{Cof}[k(z + h)] + F_2 \operatorname{Sin}[k(z + h)]\}\, dk$$

geführt. Partikuläre Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\nu}{c} \Delta f = 0 \qquad \text{mit} \qquad \Delta f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

sind

$$f_1 = \exp(i k x) \operatorname{Cof}[m(z + h)], \qquad f_2 = \exp(i k x) \operatorname{Sin}[m(z + h)]$$

mit $m^2 = k^2 + \frac{i c k}{\nu}$. Für die Geschwindigkeitskomponenten u und w machen wir unter Berücksichtigung der Kontinuitätsbedingung den Ansatz

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi} \int_S T(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i k (x - \xi)]\{-i k (F_1 \operatorname{Cof}[k(z + h)] + F_2 \operatorname{Sin}[k(z + h)]) \\ &\quad + F_3 \operatorname{Cof}[m(z + h)] + F_4 \operatorname{Sin}[m(z + h)]\}\, dk, \\ w &= \frac{1}{2\pi} \int_S T(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i k (x - \xi)]\{-k (F_1 \operatorname{Sin}[k(z + h)] + F_2 \operatorname{Cof}[k(z + h)]) \\ &\quad - \frac{i k}{m}(F_3 \operatorname{Sin}[m(z + h)]) + F_4 \operatorname{Cof}[m(z + h)]\}\, dk. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Mittels der Randbedingungen $u = 0$ und $w = 0$ am Flachwasserboden $z = -h$ können zwei der im Ansatz (29) auftretenden Funktionen F_1, F_2, F_3, F_4 eliminiert werden, und wir erhalten für die Geschwindigkeitskomponenten u, w den Lösungsansatz

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi}\int_S T(\xi)\,d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\,k\,(x-\xi)\right]\{i\,k\,(-\mathfrak{Cof}\,[k\,(z+h)] + \mathfrak{Cof}\,[m\,(z+h)])\,F_1^* \\ &\quad + i\,(-k\,\mathfrak{Sin}\,[k\,(z+h)] + m\,\mathfrak{Sin}\,[m\,(z+h)])\,F_3^*\}\,dk\,, \\ w &= \frac{1}{2\pi}\int_S T(\xi)\,d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\,k\,(x-\xi)\right]\Big\{k\,(-\mathfrak{Sin}\,[k\,(z+h)] + \frac{k}{m}\,\mathfrak{Sin}\,[m\,(z+h)])\,F_1^* \\ &\quad + k\,(-\mathfrak{Cof}\,[k\,(z+h)] + \mathfrak{Cof}\,[m\,(z+h)])\,F_2^*\Big\}\,dk\,. \end{aligned}\right\} \tag{29'}$$

Durch die beiden Oberflächenbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= 0\,, \\ \frac{2\nu}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z} + \frac{g}{c^2}\,w &= \frac{1}{\varrho\,c}\frac{\partial}{\partial x}(p+T) \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad z = 0,$$

sind die Funktionen F_1^* und F_2^* bestimmt. Damit sind alle interessierenden Größen bekannt. Die Gleichung der Wasseroberfläche ergibt sich nach (12) zu

$$\zeta(x) = -\frac{1}{2\pi\varrho}\int_S T(\xi)\,d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\,k\,(x-\xi)\right]\frac{m\,\mathfrak{Sin}\,[k\,h]\,\mathfrak{Cof}\,[k\,h] - k\,\mathfrak{Cof}\,[k\,h]\,\mathfrak{Sin}\,[m\,h]}{\Delta}\,dk\,, \tag{30}$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta &= 4\,i\,\nu\,k^2\,m\,(c - 2\,i\,\nu\,k) + k\,(c - 2\,i\,\nu\,k)^2\,\{m\,\mathfrak{Cof}\,[k\,h]\,\mathfrak{Cof}\,[m\,h] - k\,\mathfrak{Sin}\,[k\,h]\,\mathfrak{Sin}\,[m\,h]\} \\ &\quad - g\,\{m\,\mathfrak{Sin}\,[k\,h]\,\mathfrak{Cof}\,[m\,h] - k\,\mathfrak{Cof}\,[k\,h]\,\mathfrak{Sin}\,[m\,h]\} - 4\,\nu^2\,k^2\,m\,\{k\,\mathfrak{Cof}\,[k\,h]\,\mathfrak{Cof}\,[m\,h] \\ &\quad - m\,\mathfrak{Sin}\,[k\,h]\,\mathfrak{Sin}\,[m\,h]\} \end{aligned} \tag{31}$$

und

$$m^2 = k^2 + \frac{i\,c\,k}{\nu}.$$

Der Druckwiderstand ist nun nach der Formel

$$R = -\int_S T(x)\frac{d\zeta}{dx}\,dx$$

zu berechnen, wo $\zeta(x)$ aus (30) zu entnehmen ist. Damit wird also

$$R = -\frac{1}{2\pi\varrho}\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}[U^2 + V^2]\,(m\,\mathfrak{Sin}\,[k\,h]\,\mathfrak{Cof}\,[m\,h] - k\,\mathfrak{Cof}\,[k\,h]\,\mathfrak{Sin}\,[m\,h])\,\frac{k}{\Delta}\,dk\,, \tag{32}$$

wo

$$U + i\,V = \int_S T(x)\exp\left[i\,k\,x\right]dx \tag{33}$$

gesetzt ist.

Wir bemerken noch, daß die von *Srétensky* für unendlich tiefes Wasser aufgestellten Formeln aus den hier angegebenen beim Grenzübergang $h \to \infty$ hervorgehen.

(Eingegangen am 12. November 1958.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *F. Kolberg*, Würselen b. Aachen, Kaiserstr. 69.

Theory of flow through profiles with large camber and thickness arranged in cascade with small pitch chord ratio

By R. Ōba

1. Introduction. With speeding up and the increased power of axial flow hydraulic machinaries, the blade elements in these impeller and guide vane etc. tend to consist of the profiles with not small camber and thickness, and also the pitch chord ratio of these straight cascades tend to diminish. Especially, it is the case with gas turbines. For the theoretical studies on the flow through such a straight cascade the reports have been published by *W. H. Isay*[1], *M. Shirakura*[2] and *H. Murai*[3], etc.[4]. In the first two investigators' solutions, however, the numerical calculations are very complicated and *H. Murai*'s solution seems to be not quite satisfactory for us, either.

In the former theories[5] of the cascade that consists of the profiles with not so large camber and thickness, even if the pitch chord ratio is as small as to be used in the Kaplan turbine, there are difficulties[6] for the poor convergency of the infinite series to be used and so on. It is well known that the theories[6, 7, 8, 9, 10, 11] with assumption of large pitch chord ratio can not be applied to such a cascade[12].

Accordingly, in this paper, the author proposed an analytical method for the solution on the flow through the straight cascade with small pitch chord ratio, in which the numerical calculations are comparatively easy not only in the case of the profiles with large camber and thickness as gas turbines, but, in those with small camber and thickness as axial flow turbines, -pumps and compressors.

Now, depending upon the method in common use, to solve the potential flow through the straight cascade is reduced to transforming the appointed cascade into a circle or two or more. In these cases, if we transform the cascade profiles into a circle to simplify the calculation, there arises a difficult point that the accuracy of the calculation becomes deteriorated, as *M. Shirakura* pointed it out, because of the midway points of the two neighbouring profiles are transformed into the point at infinity, and because of the corresponding points of the ones at infinity in the z-plane draw near a circle in the ζ-plane. *H. Murai* has avoided it skilfully.

In this paper, to more simplify the calculation, the appointed cascade is transformed into the one of the profiles with small camber by the *Howell*'s transformation and by the inverse transformation, and so it becomes possible to transform the cascade profiles into the figure most resembling a circle by the next transformation; thus we can remove the above mentioned difficulties. Through such analysis, the numerical calculations become very easy for various cascade arrengements. And also it is ascertained that a part of the former theories[13], is the special case of this one.

For the numerical examples, in the gas turbine cascade used by *F. Numachi* and *T. Kurokawa*[14] and by *H. Hausenblas*[15] in their experiments, as *H. Murai* has calculated, the surface pressure dis-

---

[1] *W. H. Isay*, Z. angew. Math. Mech. 33 (1953) S. 397.

[2] *M. Shirakura*, Trans. Jap. Soc. Mech. Engrs. 18 (1952) p. 16; *M. Shirakura*, Trans. Jap. Soc. Mech. Engrs. 21 (1955) p. 577.

[3] *H. Murai*, Z. angew. Math. Mech., 35 (1955) S. 48 and Rep. Inst. High Sp. Mech., Tōhoku Univ. 7 (1956) p. 15.

[4] *G. S. Samoilovich*, Prikladnaya Matematica i Mekhanica 14 (1950); *C. H. Wu* and *C. A. Brown*, J. Aeron. Sci. 19 (1952) p. 183.

[5] *E. Kasahara*, Trans. Jap. Soc. Mech. Engrs. 20 (1954) p. 577; *T. Kawasaki*, J. Jap. Soc. App. Mech. 5 (1952) p. 3; *H. Kikuchi*, Rep. Inst. High Sp. Mech. Tōhoku Univ. 6 (1956) p. 103.

[6] *S. Abe*, Trans. Jap. Soc. Mech. Engrs. 17 (1951) p. 57 and Mem. Inst. High Sp. Mech., Tōhoku Univ. 2 (1950) p. 93.

[7] *G. Kamimoto*, Trans. Jap. Soc. Mech. Engrs. Vol. 17 (1951) p. 58.

[8] *H. Murai*, Trans. Jap. Soc. Mech. Engrs. 17 (1951) p. 52 and Mem. Inst. High Sp. Mech. Tōhoku Univ. 2 (1950) p. 83.

[9] *H. Kikuchi*, Mem. Inst. High Sp. Mech. Tōhoku Univ. 10 (1953) p. 85.

[10] *B. Fujimoto* and *K. Hirose*, Mem. Faculty Engineering Kyōto Univ. 12 (1950) p. 20.

[11] *R. A. Howell*, Phil. Mag. 39 (1948) p. 913.

[12] In the analysis for the cascade that consists of the profiles with small camber and thickness, the numerical calculations based upon the above mentioned theories from footnotes [1, 2, 3] are not always easy.

[13] See footnotes 6, 7, 11.

[14] *F. Numachi* and *T. Kurokowa*, Trans. Jap. Soc. Mech. Engrs. 15 (1950) p. 46 and Mem. Inst. High Sp. Mech. Tōhoku Univ. 5 (1951) p. 39.

[15] *H. Hausenblas*, Ing.-Arch., 19 (1951) S. 75.

tributions and other factors are calculated, and the good agreement between the calculated value and the experimented one is proved. In these calculations, the simplicity of the numerical calculation is also confirmed.

2. Symbols. The following symbols are used in this paper:

t/l	pitch chord ratio,
γ	$= \frac{\pi}{2} - \Theta$ stagger angle,
Θ	cascade angle,
$V_{-\infty}, \alpha_{-\infty}$	velocity of flow before passing profiles in a cascade, angle between velocity $V_{-\infty}$ and profile chord,
$V_{\infty}, \alpha_{\infty}$	velocity of flow after passing profiles in a cascade, angle between velocity V_{∞} and profile chord,
V, α	geometrical mean of velocities $V_{-\infty}$ and V_{∞}, incidence angle,
Γ	circulation around a single profile,
Ca	lift coefficient of a single profile,
α_n	zero lift angle,
v	surface velocity along the profile,
W	complex potential,
z	$= x + iy$ physical plane,
ζ	$= \varrho \exp i\varphi$,
ζ_N	$= \varrho_N \exp i\varphi_N = \xi_N + i\eta_N$ mapping function transformed the profile into a unit circle.

The suffix N represents the number of the mapping plane, the suffices $-\infty$ and ∞ respectively signify infinite front and infinite back in the z-plane, and represent the corresponding points in the mapping plane. Besides, not indicating the profile chord expressly, we can take it following our own direction in our own way.

3. Conformal mappings and mapping functions. As shown in Fig. 1, the cascade at issue is an arbitrary cascade[1] and consists of profiles with large camber, thickness and has a small pitch chord ratio. Such a cascade is transformed into a single figure in the ζ_1-plane by the well known mapping function[2]

$$\zeta_1 = \tanh\left(\frac{\pi e^{-i\gamma}}{t} z - z_c\right) \quad \text{where } z_c, \text{ complex constant .} \tag{1}$$

Then the single figure in the ζ_1-plane is transformed into the one in the ζ_2-plane in Fig. 2 by the transformation of coordinate, equation (2). Besides, we transformed it inversely into the ones in the ζ_3-plane by the similar mapping function of equation (1), equation (2).

$$\zeta_2 = D_1 \zeta_1 + D_0 \quad \text{where} \quad D_0, D_1 = k_1 e^{i\sigma_1}, \text{ complex constant ,} \tag{2}$$

$$\zeta_3 = \tanh^{-1} \zeta_2 . \tag{3}$$

In these transformations, determining D_0, D_1 suitably, we can transform the cascade in the ζ_3-plane into the one that consists of profiles with small camber and has not so small a pitch chrod ratio. Besides, in an accelerated cascade as shown in Fig. 3, we must see to that the upper front and the lower back parts of the profile approach the profile chord to be determined in the following equation (4), and the points $\zeta_{3\infty}$, $\zeta_{3-\infty}$ approach the said parts of the profile and keep away from the profile as far as possible. In a retarded cascade, it is just opposite to the above.

Then we transform the mapped cascade of pitch chord ratio t_4, of stagger angle γ_4 into the single figure in the ζ_5-plane by the mapping functions (3):

$$\zeta_4 = D_3 \zeta_3 + D_2 \quad \text{where} \quad D_2, D_3 = k_3 e^{i\sigma_3}, \text{ complex constant,} \tag{4}$$

$$\zeta_4 = \frac{t_4}{2\pi}\left(e^{i\gamma_4} \log \frac{\zeta_5 + m}{\zeta_5 - m} + e^{-i\gamma_4} \log \frac{1 + m\zeta_5}{1 - m\zeta_5}\right). \tag{5}$$

The leading edges of the profiles in the ζ_4-plane get on with the mid-points v of the radius of curvature. And, D_2, D_3 must be determined, as one mid-chord point agrees with the origin of the ζ_4-plane, as the profile chord gets on the ξ_4-axis, and as the chord length is unity.

[1] If the camber and thickness are not so large, and if the pitch chord ratio is not so small, we can calculate it by the *R. A. Howell*'s theory.

[2] See footnote 2 and 11 of page 276.

Well, even if the gas turbine cascade, the profiles in the z-plane have customarily a thin thickness on the camber line like an aeroplane wing. Then, in the calculation of the corresponding

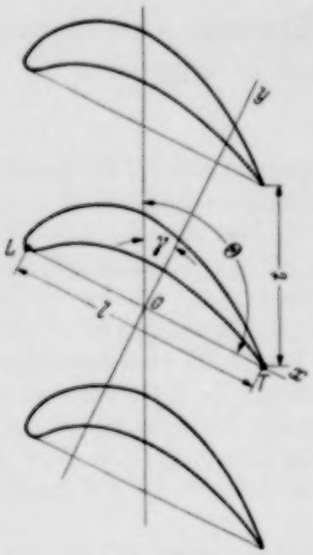


Fig. 1. z-plane.

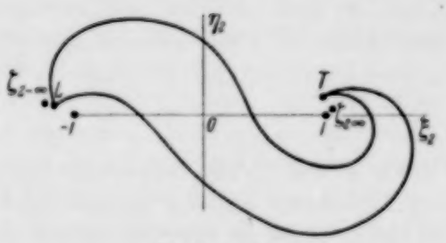


Fig. 2. ζ_2-plane.

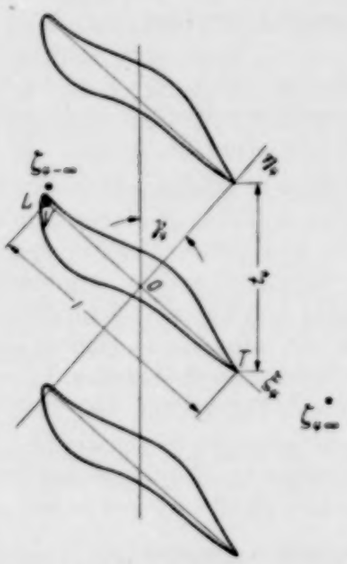


Fig. 3. ζ_4-plane.

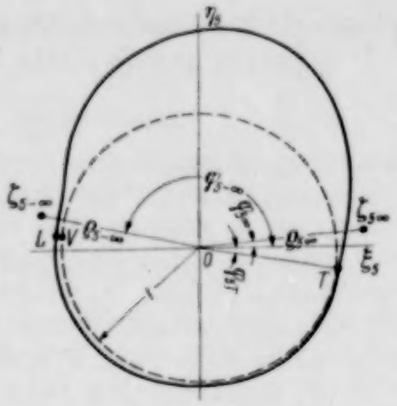


Fig. 4. ζ_3-plane.

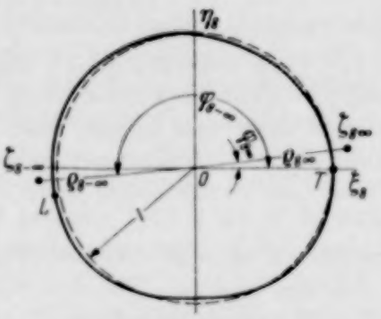


Fig. 5. ζ_5-plane.

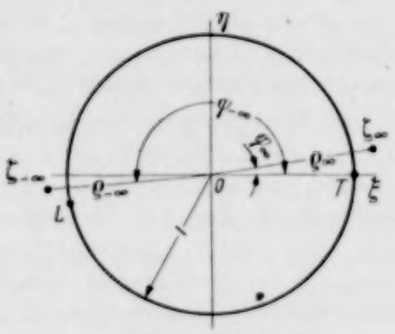


Fig. 6. ζ-plane.

Fig. 1...6. Physical plane and mapping planes.

points by the transformation in equation (4), we can resort to a thin profile theory like *S. Abe*'s[1] and *G. Kamimoto*'s[2]. Then, in the first approximation, even if pitch chord ratio be small, adopting the next relations, equations (6_1), (6_2), we can get the good approximation except the extreme neigh-

[1] See footnote 6 of page 276.
[2] See footnote 7 of page 276.

bourhood of the leading edges:

$$\xi_4' = \frac{t_4}{\pi}\left(\cos\gamma_4 \tanh^{-1}\frac{2\,m\cos\varphi_5'}{1+m^2} + \sin\gamma_4 \tan^{-1}\frac{2\,m\sin\varphi_5'}{1-m^2}\right) + n\,t_4\sin\gamma_4\,, \tag{6_1}$$

$$\eta_4' = \frac{2\,m\,s\,t_4}{\pi f}\sin(\varphi_5 - \varphi_{5T})\log\varrho_5' + n\,t_4\cos\gamma_4 \tag{6_2}$$

where

$$s = \sqrt{1+m^4+2\,m^2\cos 2\gamma_4}\,,$$
$$f = 1+m^4-2\,m^2\cos 2\varphi_5'\,,$$
$$n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Further, if we denote the radius of curvature of the leading edges δ, the first approximate points of the nearby leading edges are calculated by the relation

$$(\varrho_{5L}' - 1)^2 = \frac{\pi\,\delta\,(1-m^4)^2}{2\,t_4\,m\,\sqrt{s^3}} \tag{7}$$

where parameters m, φ_{5T} must be determinated by the two relations

$$\tan\varphi_{5T} = \frac{1-m^2}{1+m^2}\tan\gamma_4\,, \tag{8_1}$$

$$\frac{1}{t_4} = \frac{2}{\pi}\left(\cos\gamma_4\tanh^{-1}\frac{2\,m\cos\varphi_{5T}}{1+m^2} + \sin\gamma_4\tan^{-1}\frac{2\,m\sin\varphi_{5T}}{1-m^2}\right). \tag{8_2}$$

For given t_4, γ_4, these equations (8_1), (8_2) are solved, and the results are shown in Fig. 7.

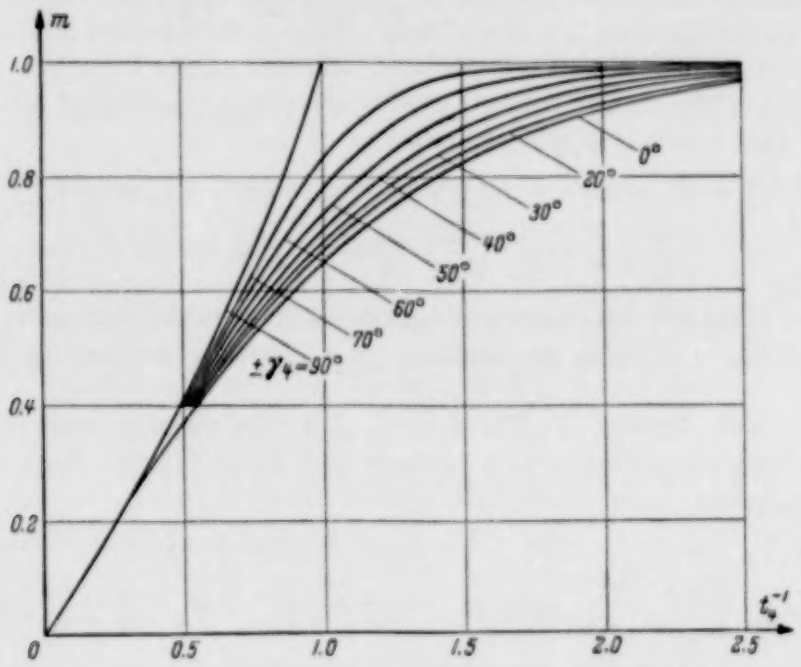


Fig. 7. Pitch chord ratio t_4, stagger angle γ_4 and cascade parameter m.

To calculate more accurately the points in the ζ_5-plane, we put the first approximate values ϱ_5', φ_5' into the next relations, equations (9_1), (9_2) with which the equation (5) was solved, and calculate the corresponding values ξ_4', η_4' of ξ_4, η_4 and so calculate the differences $\Delta\xi_4$, $\Delta\eta_4$ from the appointed values ξ_4, η_4:

$$\xi_4 = \frac{t_4}{2\pi}\left[(T_1+T_2)\cos\gamma_4 + (T_3+T_4)\sin\gamma_4\right] + n\,t_4\sin\gamma_4\,, \tag{9_1}$$

$$\eta_4 = \frac{t_4}{2\pi}\left[(T_1-T_2)\sin\gamma_4 + (T_3-T_4)\cos\gamma_4\right] + n\,t_4\cos\gamma_4 \tag{9_2}$$

where

$$T_1 = \tanh^{-1}\frac{2\,\varrho_5\,m\cos\varphi_5}{\varrho_5^2+m^2}\,, \qquad T_2 = \tanh^{-1}\frac{2\,\varrho_5\,m\cos\varphi_5}{1+m^2\,\varrho_5^2}\,,$$

$$T_3 = \tan^{-1}\frac{2\,\varrho_5\,m\sin\varphi_5}{1-m^2\,\varrho_5^2}\,, \qquad T_4 = \tan^{-1}\frac{2\,\varrho_5\,m\sin\varphi_5}{\varrho_5^2-m^2}\,.$$

Then the corrections $\Delta\varrho_5$, $\Delta\varphi_5$ of ϱ_5', φ_5' are calculated by the relations

$$\Delta\varrho_5 = \frac{1}{\Delta}(N_{1\Delta}\xi_4 - N_{2\Delta}\eta_4)\,, \tag{10_1}$$

$$\varrho_5'\,\Delta\varphi_5 = \frac{1}{\Delta}(N_{1\Delta}\eta_4 + N_{2\Delta}\xi_4) \tag{10_2}$$

where

$$N_1 = \frac{m\,t_4}{\pi}\left[\cos\gamma_4\cos\varphi_5'\left(\frac{1-m^2\varrho_5'^2}{f'} - \frac{\varrho_5'^2-m^2}{f''}\right) + \sin\gamma_4\sin\varphi_5'\left(\frac{1+m^2\varrho_5'^2}{f'} - \frac{\varrho_5'^2+m^2}{f''}\right)\right],$$

$$N_2 = \frac{m\,t_4}{\pi}\left[\sin\gamma_4\cos\varphi_5'\left(\frac{1-m^2\varrho_5'^2}{f'} + \frac{\varrho_5'^2-m^2}{f''}\right) - \cos\gamma_4\sin\varphi_5'\left(\frac{1+m^2\varrho_5'^2}{f'} + \frac{\varrho_5'^2+m^2}{f''}\right)\right],$$

$$f' = (\varrho_5'^2+m^2)^2 - (2\,m\,\varrho_5'\cos\varphi_5')^2\,, \qquad f'' = (1+m^2\,\varrho_5'^2)^2 - (2\,m\,\varrho_5'\cos\varphi_5')^2\,,$$

$$\Delta = N_1^2 + N_2^2\,.$$

In the same way, we can further proceed to the successive approximate calculations. But, mostly the second approximate values are sufficient for our use except the points of the nearby leading edges.

The above transformations from equation (1) to equation (5) are essential, in such a case of the arbitrary profiles with large camber, thickness and small pitch chord ratio. If the profiles have not so large a camber, thickness and not so small a pitch chord ratio or if the absolute value of the stagger angle is small, we can proceed easily to the calculation neglecting the transformation, equations (1), (2), (3)[1], or equations (2), (3), (4), (5)[2] respectively. But, even if the camber and the thickness are small, if the pitch chord ratio is too small, the transformation of the equation (5) with the transformation, equations (1), (2), (3) will be made more easily.

If the camber and the thickness are not so large, and if the pitch chord ratio is not so small, the required figure in the ζ_5-plane is quite a circle. But, if the cascade is like the one of degree as shown in Fig. 1, we can not avoid the figure being slightly unlike a circle.

Therefore, generally, the figure in the ζ_5-plane must be transformed into a figure to make it resemble a circle closely by the mapping functions

$$\zeta_6 = D_5\zeta_5 + D_4 \text{ where } D_4,\ D_5 = k_5\,e^{i\sigma_5},\ \text{complex constant,} \tag{11}$$

$$\frac{\zeta_7-1}{\zeta_7+1} = \left(\frac{\zeta_6-1}{\zeta_6+1}\right)^{\tau} \text{ where } \tau,\ \text{real constant.} \tag{12}$$

If the figure in the ζ_7-plane is not quite a resemblance to a circle, we can transform it again into the closed curve bearing a striking resemblance to a circle by reiterating the above two transformations.

Finally, by the well known *T. Theodorsen — I. E. Garrick*'s transformation[3], the closed curve bearing a striking resemblance to a circle is transformed into a unit circle, whose center is on the origin in the ζ-plane:

$$\zeta_8 = D_7\zeta_7 + D_6 \text{ where } D_6,\ D_7 = k_7\,e^{i\sigma_7},\ \text{complex constant}\,, \tag{13}$$

$$\zeta_8 = \zeta\exp\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{\zeta^n} \qquad \text{where } C_n = A_n + i\,B_n\,,\quad A_n, B_n,\ \text{real constant}\,. \tag{14}$$

where D_6, D_7 must be determined as the closed curve in the ζ_8-plane border on sufficiently a unit circle whose center is on the origin.

4. Complex potential and the hydrodynamic characteristics of the profile in a cascade. Generally, the complex potential corresponding to the z-plane and taking the unit circle for one of the stream line in the ζ-plane is given by the formula

$$W = \frac{M}{2\pi}\left(\log\frac{\zeta-\zeta_{-\infty}}{\zeta-\zeta_{\infty}} + \log\frac{\zeta-1/\bar{\zeta}_{-\infty}}{\zeta-1/\bar{\zeta}_{\infty}}\right) - \frac{i\,\Gamma_{-\infty}}{2\pi}\log\frac{\zeta-\zeta_{-\infty}}{\zeta-1/\bar{\zeta}_{-\infty}} - \frac{i\,\Gamma_{\infty}}{2\pi}\log\frac{\zeta-\zeta_{\infty}}{\zeta-1/\bar{\zeta}_{\infty}} \tag{15}$$

where M is the strength of sink and source, $\Gamma_{-\infty}$ and Γ_{∞} are the circulation respectively. On the other hand, because of the circulation in the unit circle is equal to the one of the profile, next condition is to be satisfied:

$$\Gamma = \Gamma_{-\infty} + \Gamma_{\infty}\,. \tag{16}$$

---

[1] In such a case, the theories of footnotes 6 and 7 of page 276 are special cases of this one.

[2] In such a case, the theory of footnote 11 of page 276 is a special case of this one.

[3] *T. Theodorsen* and *T. E. Garrick*, General Potential Theory of Arbitrary Wing Section, N. A. C. A. Report No. 452 (1933).

Besides, as the flow conditions at infinity, the next relations must be satisfied:

$$\left.\frac{dW}{dz}\right|_{z=\pm\infty} = V e^{-i\alpha} \pm i \frac{\Gamma}{2t} e^{i\gamma} \tag{17}$$

In the results, the necessary complex potential is given as follows:

$$W = \frac{tV}{2\pi}\left(e^{-i(\alpha+\gamma)} \log\frac{\zeta-\zeta_{-\infty}}{\zeta-\zeta_{\infty}} + e^{i(\alpha+\gamma)} \log\frac{\zeta-1/\bar{\zeta}_{-\infty}}{\zeta-1/\bar{\zeta}_{\infty}}\right) - \frac{i\Gamma}{4\pi}\log\frac{(\zeta-\zeta_{-\infty})(\zeta-\zeta_{\infty})}{(\zeta-1/\bar{\zeta}_{-\infty})(\zeta-1/\bar{\zeta}_{\infty})} . \tag{18}$$

This agrees with the one given by *H. Murai* for form's sake.

And the circulation Γ being left as undetermined constant is determinated by the *Kutta-Joukowsky*'s hypothesis. If the trailing edge rounds out and is not pointed, we calculate Γ as $dW/d\zeta = 0$ at $\varphi = \varphi_T$. Then the circulation Γ is determinated as follows:

$$\frac{\Gamma}{2tV} = \frac{K_{-\infty}\sin(\alpha+\gamma+\varkappa_{\infty}) - K_{\infty}\sin(\alpha+\gamma+\varkappa_{-\infty})}{K_{-\infty}K_{\infty} + K_{\infty}\cos\varkappa_{\infty} + K_{\infty}\cos\varkappa_{-\infty}} \tag{19}$$

where

$$K_{-\infty}\exp i\varkappa_{-\infty} = \zeta_{-\infty} - \zeta_T , \qquad K_{\infty}\exp i\varkappa_{\infty} = \zeta_{\infty} - \zeta_T .$$

Then the hydrodynamic characteristics of the profiles in a cascade can be calculated immediately. That is, the lift coefficient is determined as follows:

$$C_a = \frac{2\Gamma}{tV} = I\sin(\alpha - \alpha_n) . \tag{20}$$

The inclination of the lift coefficient curve I and the zero lift angle α_n in this equation are calculated as follows:

$$I = 4\frac{t}{l}\frac{\sqrt{K_{-\infty}^2 + K_{\infty}^2 - 2K_{\infty}K_{-\infty}\cos(\varkappa_{\infty}-\varkappa_{-\infty})}}{K_{-\infty}K_{\infty} + K_{-\infty}\cos\varkappa_{\infty} + K_{\infty}\cos\varkappa_{-\infty}} , \tag{21}$$

$$\alpha_n = -\gamma - \tan^{-1}\frac{K_{-\infty}\sin\varkappa_{\infty} - K_{\infty}\sin\varkappa_{-\infty}}{K_{-\infty}\cos\varkappa_{\infty} - K_{\infty}\cos\varkappa_{-\infty}} . \tag{22}$$

Then the velocity in the physical plane, z-plane, is given as follows:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz} . \tag{23}$$

Especially, calculating the velocity distribution on the surface of the profile, it is

$$\frac{v}{V} = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot Q_4 \cdot Q_5 \tag{24}$$

where

$$Q_1 = \frac{2[F_1\sin(\alpha+\gamma) + F_2\cos(\alpha+\gamma)] + \dfrac{\Gamma}{Vt}F_3}{F_4} ,$$

$$F_1 = -\frac{\varrho_{-\infty}}{\varrho_{\infty}} + \frac{\varrho_{\infty}}{\varrho_{-\infty}} + \frac{\varrho_{-\infty}^2 - 1}{\varrho_{-\infty}}\cos(\varphi-\varphi_{\infty}) - \frac{\varrho_{\infty}^2-1}{\varrho_{\infty}}\cos(\varphi-\varphi_{-\infty}) ,$$

$$F_2 = 2\sin(\varphi_{-\infty}-\varphi_{\infty}) - \frac{\varrho_{-\infty}^2+1}{\varrho_{-\infty}}\sin(\varphi-\varphi_{\infty}) - \frac{\varrho_{\infty}^2+1}{\varrho_{\infty}}\sin(\varphi-\varphi_{-\infty}) ,$$

$$F_3 = -\varrho_{-\infty}\varrho_{\infty} + \frac{1}{\varrho_{-\infty}\varrho_{\infty}} + \frac{\varrho_{-\infty}^2-1}{\varrho_{-\infty}}\cos(\varphi-\varphi_{\infty}) - \frac{\varrho_{\infty}^2-1}{\varrho_{\infty}}\cos(\varphi-\varphi_{-\infty}) ,$$

$$F_4 = \left[\frac{\varrho_{-\infty}^2+1}{\varrho_{-\infty}} - 2\cos(\varphi-\varphi_{-\infty})\right]\left[\frac{\varrho_{\infty}^2+1}{\varrho_{\infty}} - 2\cos(\varphi-\varphi_{\infty})\right] ,$$

$$Q_2 = \frac{k_7}{\varrho_8}\left\{\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty}(nA_n\cos n\varphi + nB_n\sin n\varphi)\right]^2 + \left[\sum_{n=1}^{\infty}(nA_n\sin n\varphi - nB_n\cos n\varphi)\right]^2\right\}^{-\frac{1}{2}} ,$$

$$Q_3 = \tau k_5\left[\frac{1+\varrho_7^4 - 2\varrho_7^2\cos 2\varphi_7}{1+\varrho_6^4 - 2\varrho_6^2\cos 2\varphi_6}\right]^{\frac{1}{2}} ,$$

$$Q_4 = \frac{\pi k_3\sqrt{f'f''}}{2mst_4}[1+\varrho_5^4 - 2\varrho_5^2\cos 2(\varphi_5-\varphi_{5T})]^{-\frac{1}{2}} ,$$

$$Q_5 = k_1\left[\frac{1+\varrho_1^4 - 2\varrho_1^2\cos 2\varphi_1}{1+\varrho_2^4 - 2\varrho_2^2\cos 2\varphi_2}\right]^{\frac{1}{2}} .$$

5. The limit of the application of this theory. The limit of the application of such a theory depending upon the required accuray and the trouble of the calculation, in short, to decide this are the degree of that the points at infinity in the z-plane draw near the unit circle in the ζ-plane, the convergency of the *Fourier* series to be used and the accuracy. The corresponding of the former is m[1] as shown in Fig. 7. By such m, depending upon the required accuracy or the camber, thickness of the profile, it is proper roughly that $m = 0.70$ is the limit of the application for most of the former theories[2]. Once over this limit, abruptly, either the accuracy of the calculation drops, or the convergency of the *Fourier* series detoriorates. In the author's theory, such difficulties are removed with less compricate numerical calculations.

The more m draws near to unity, the more the points in the ζ-plane corresponding to the ones to take at regular intervals on the profiles in the z-plane are in close order. On the other hand, for the accuracy of the calculation, at least, the *Fourier* series needs to be calculated precisely near the close points. In such conditions, because of the good convergency of the *Fourier* series in the author's theory, and because of the points to be in close order, it becomes easily to keep good accuracy by means of a few corrections for the *Fourier* series by the ordinal simple method. Therefore, the limit of the application of the author's theory must be extended considerably.

In the rear numerical examples, even if the profiles are built up with large camber and thickness, even if m is 0.97, correcting the *Fourier* constants from the method of summation (36 points method) as we above mentioned, the author can calculate them with good accuracy.

6. Examples of the numerical calculation.

a) The experimented profile by *F. Numachi* and *T. Kurokawa*. For the cascade of guide vane blades of gas turbines experimented by *F. Numachi* and *T. Kurokawa*, that the profile form is shown in Fig. 8 and is tableted by Table 1, the lift coefficient and the surface pressure distribution on the profile in the case[3] of $\gamma = -45.61°$, $\alpha = 45.61°$ are calculated.

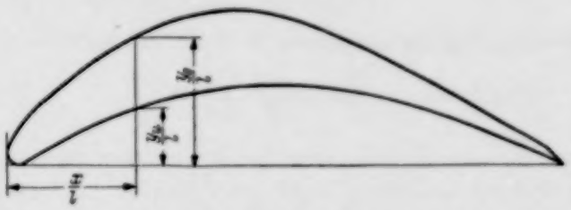


Fig. 8. The profile experimented by *F. Numachi — T. Kurokawa*.

Table 1. *The dimension of the profile from F. Numachi and T. Kurokawa*

x/l	0	0.01722	0.04990	0.07485	0.09980	0.14970	0.19960
y_O/l	0.01871	0.06257	0.10025	0.12525	0.14691	0.18268	0.21088
y_U/l	0.01871	0	0.01826	0.03373	0.04795	0.04241	0.09266
x/l	0.24950	0.29940	0.34930	0.39920	0.44910	0.49900	0.54890
y_O/l	0.23663	0.25584	0.26796	0.27275	0.27031	0.25983	0.24266
y_U/l	0.10918	0.12255	0.13249	0.13912	0.14222	0.14276	0.14037
x/l	0.59880	0.64870	0.69860	0.79840	0.89820	0.96307	1.00000
y_O/l	0.22250	7.19855	0.17260	0.12031	0.06806	0.03363	0
y_U/l	0.13418	0.12445	0.11158	0.08109	0.04271	0.01497	0

In the analysis, for the polygonal line being on the upper surface near the trailing edge of the profile as shown in Fig. 8, the author uses the nonpolygonal line to round out slightly in the same way as *H. Murai* did. As the value of the calculated lift coefficient by this theory is 2.08, it differs from the above mentioned experimented value 2.02 by 3% and from the calculated value by *H. Murai* 2.10 by —1%. The surface pressure distribution is calculated by the pressure coefficient

[1] Even if the case with the transformations, equations (1), (2), (3), (4); being calculated by t/l and γ, m is the standard roughly.

[2] See footnotes 5, 6, 7, 8, 9, 10 of page 276.

[3] *H. Murai* had taken up this for the numerical example of his theory.

$(P - P_{-\infty})/\frac{1}{2}\varrho V_{-\infty}^2$ referring to the velocity at front infinity $V_{-\infty}$ as the report by *F. Numachi* and *T. Kurokawa* shows. The result is shown in Fig. 9 to compare it with the experimented value, and with the calculated value by *H. Murai*. The full line shows the author's calculated value and the broken one shows the *H. Murai*'s calculated one, then, the two agree with each other fairly well. Besides, they seem to agree with the experimented value considerably.

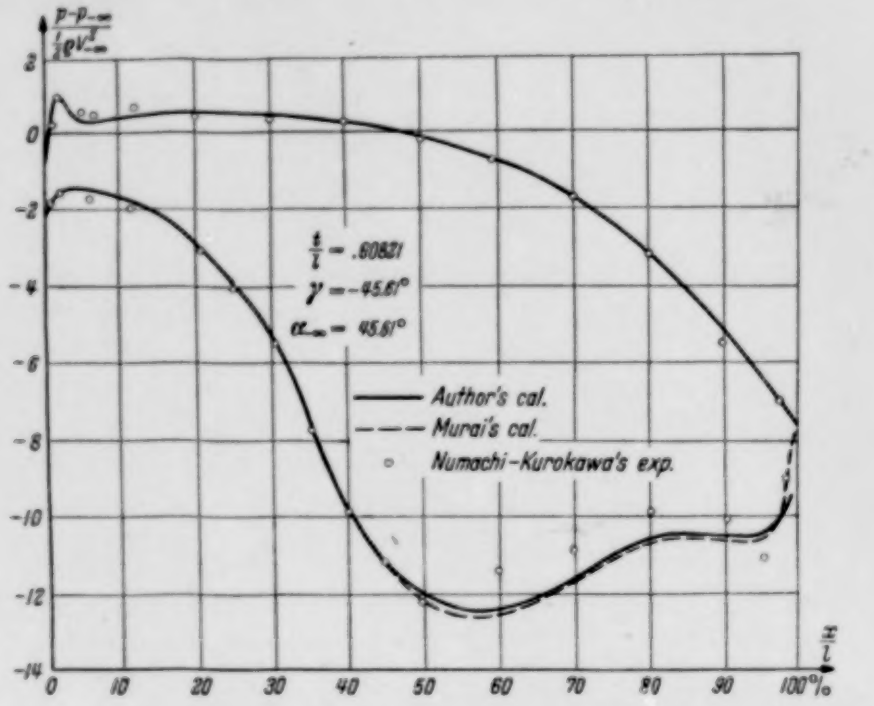


Fig. 9. Comparison between the calculated surface pressure distribution and the experimented one by *F. Numachi — T. Kurokawa*.

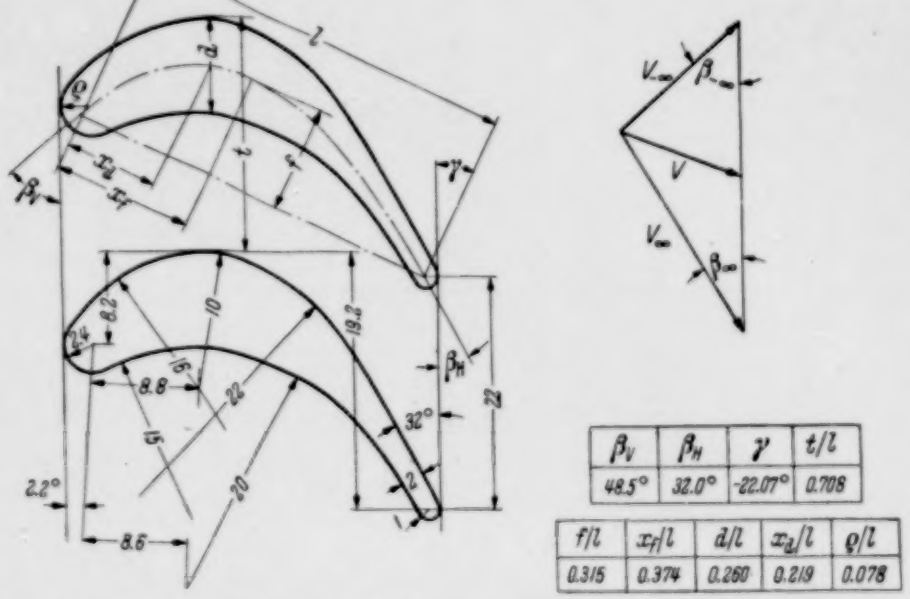


Fig. 10. The profile and the cascade arrangement experimented by *H. Hausenblas*.

b) The experimented profile by *H. Hausenblas*. For the cascade B_{2a}[1] among the cascade of blades of gas turbines experimented by *H. Hausenblas*, that the profile form and the cascade arrangement are shown in Fig. 10, the lift coefficient curve and its surface pressure distribution on the profile are calculated. First, it is shown in Fig. 11 to compare with the calculated and the experimented lift coefficient curve. In Fig. 11, the axis of abscissas takes α and $i = \beta_v - \beta_{-\infty}$, and the axis of ordinate takes $C_a\, l/t$. In this figure, the full line shows the author's calculated value, the dotted and dash line shows the *H. Murai*'s calculated value and the broken line shows the experimented value, then the former two agree with each other fairly well, and also seem to agree with the third. Next, in Fig. 12, with the surface pressure distribution in the case $\beta_{-\infty} = 37°$ that the drag lift ratio is the minimum, the calculated one and the experimented one are compared. The axis of abscissas takes the pressure coefficient referring to the velocity V and the axis of ordinate takes the chord-wise distance of the profile drawing in the lower side. In this figure, the author's calculated one in full line and the *H. Murai*'s calculated one in dotted and dash line agree with each other fairly well and also they seem to agree with *H. Hausenblas*' experimented one, too.

Well, as the *Fourier* analysis in these numerical calculations (1), (2) was based on the ordinal method of summation (36 points method) altogether, the correction as above mentioned was made only in the nearby parts of $\zeta_\infty, \zeta_{-\infty}$. In either case, the transformation of the equation (5) was tentatively calculated to the third approximation, and it was found that the second approximation agrees with the exact one up to the fourth significant figures. Therefore, the author guesses it that the second approximation for the calculation will be practically sufficient in most cases.

[1] The same as the foregoing footnote.

7. Conclusion.

1. A theoretical method is proposed, in which the flow through the straight cascade built up the profiles with large camber and thickness and with small pitch chord ratio, and especially the surface pressure distribution and the lift coefficient curve can be calculated by the comparatively easy numerical calculation.

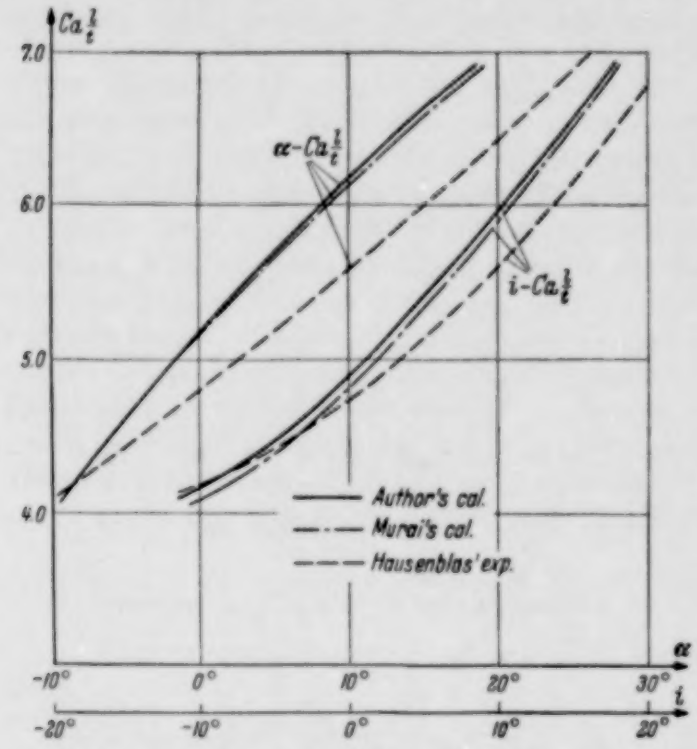


Fig. 11. Comparison between the calculated lift coefficient curve and the experimented one by *H. Hausenblas*.

2. By the numerical calculations for the cascade of the blades of gas turbine experimented by *F. Numachi* and *T. Kurokawa*, and by *H. Hausenblas*, it is confirmed that the author's calculated results of the lift coefficient and the surface pressure distribution agree with the experimented ones and the *H. Murai*'s calculated ones, and that the numerical calculations are easier than the *H. Murai*'s.

In conclusion, the author expresses his cordial gratitude to Prof. *F. Numachi*, Faculty of Engineering, Tōhoku University, for his generous guidance throughout this study, and at the same time, to Assist. Prof. *H. Murai* of the Institute of High Speed Mechanics, Tōhoku University, for his helpful suggestions and his offer of the numerous data in the numerical calculations.

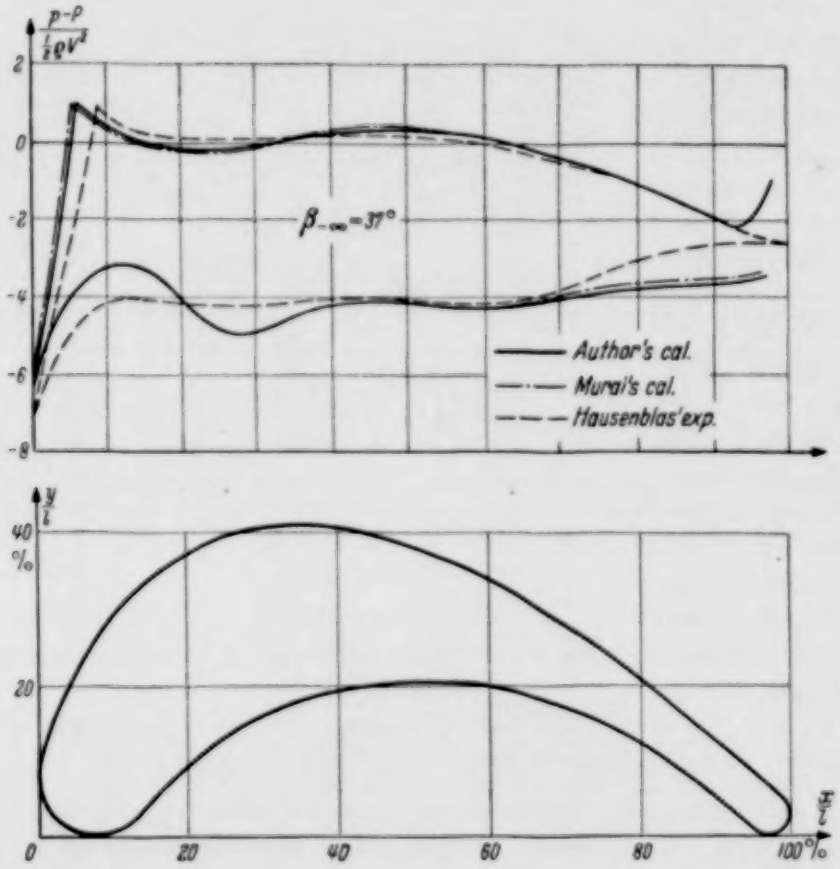


Fig. 12. Comparison between the calculated surface pressure distribution and the experimented one by *H. Hausenblas*.

(Eingegangen am 15. November 1958.)

Anschrift des Verfassers: *R. Ōba*, Sendai (Japan), Tōhoku University, Institute of High Speed Mechanics.

Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff

Eine Vorlesung

Von FRIEDRICH BACHMANN, Dr. phil., o. Professor an der Universität Kiel

Mit 160 Abbildungen. XIV, 311 Seiten Gr.-8°. 1959. DM 45,80; Ganzleinen DM 49,80

(Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. XCVI. Band)

INHALTSÜBERSICHT

I. Einführung: Spiegelungen in der euklidischen Ebene · Der Begriff der metrischen Ebene · II. Metrische (absolute) Geometrie: Das Axiomensystem der metrischen (absoluten) Geometrie · Sätze der metrischen Geometrie · Projektive und projektiv-metrische Ebenen · Begründung der metrischen Geometrie · Über das Transitivitätsgesetz für beliebige involutorische Elemente · III. Projektiv-metrische Geometrie: Projektiv-metrische Koordinatenebenen und metrische Vektorräume · Orthogonale Gruppen · Darstellung metrischer Vektorräume und ihrer orthogonalen Gruppen mit Hilfe hyperkomplexer Systeme · Die Bewegungsgruppen der hyperbolischen projektiv-metrischen Ebenen als abstrakte, aus ihren involutorischen Elementen erzeugte Gruppen (*H*-Gruppen) · IV. Euklidische Geometrie: Der Satz von PAPPUS-PASCAL in der euklidischen Geometrie · Algebraische Darstellung der euklidischen Bewegungsgruppen · V. Hyperbolische Geometrie: Hyperbolische Bewegungsgruppen · Darstellung der hyperbolischen Bewegungsgruppen durch binäre lineare Gruppen · VI. Elliptische Geometrie: Begründung der elliptischen Geometrie · Der Gruppenraum einer elliptischen Bewegungsgruppe · Anhang: Über die metrischen Bewegungsgruppen · Metrisch-euklidische Ebenen · Literatur · Zusammenstellung besonderer Zeichen · Axiomentafel · Namen- und Sachverzeichnis.

ZUR INFORMATION

Mehr als 50 Jahre sind vergangen, seit J. HELMSLEV seine „Neue Begründung der ebenen Geometrie" veröffentlichte, die M. DEHN 1926 als den höchsten Punkt bezeichnete, den die moderne Mathematik über EUKLID hinausgehend in der Begründung der Elementargeometrie erreicht hat. Seitdem ist das Operieren mit den Spiegelungen ausgebaut worden, die einerseits die geometrischen Objektive repräsentieren und andererseits die Bewegungsgruppe erzeugen. Das Ziel des Buches ist, durch eine neue Darstellung der Probleme der ebenen metrischen Geometrie jedem Interessierten den Zugang zu der neueren Entwicklung zu erschließen.

Die ebene metrische Geometrie wird rein gruppentheoretisch aus wenigen einfachen Gesetzen über Spiegelungen entwickelt. Die Gesetze gelten sowohl in der euklidischen als in den nichteuklidischen Geometrien; sie implizieren weder Anordenbarkeit noch freie Beweglichkeit. Geometrische Sätze werden durch Rechnen mit Spiegelungen bewiesen.

Es wird der Zusammenhang der ebenen metrischen Geometrie mit der Theorie der projektiv-metrischen Ebenen und der dreidimensionalen metrischen Vektorräume hergestellt, deren Bewegungsgruppen gleichfalls durch Spiegelungsgesetze beschrieben werden.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Praktische Spannungsoptik

Von Dr. phil. LUDWIG FÖPPL, em. o. Professor an der Technischen Hochschule München,
und Dr.-Ing. ERNST MÖNCH, apl. Professor an der Technischen Hochschule München.

Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 163 Abbildungen. XI, 209 Seiten Gr.-°. 1959.

Ganzleinen DM 30,—

INHALTSÜBERSICHT

Erster Abschnitt:

Die experimentellen und theoretischen Grundlagen der Spannungsoptik: Die ebene Spannungsoptik: Der ebene Spannungszustand · Die einfache spannungsoptische Apparatur · Das Polariskop mit Projektionseinrichtung · Die polarisationsoptischen Grundvorgänge · Die Aufnahme und Auswertung des Isochromatenbildes · Ermittlung der Hauptspannungslinien aus den Isoklinen · Modellwerkstoffe und Modellherstellung · Bestimmung von Bruchteilen der Isochromatenanordnung · Das Vorzeichen von Randspannungen. „Nagelprobe" · Die vollständige Auswertung des ebenen Spannungszustandes durch das Schubspannungsdifferenzverfahren · Momentennullpunkte bei Biegung von Stäben · Das spannungsoptische Laboratorium · Räumliche Spannungsoptik: Die Grundlagen des Einfrierverfahrens · Die optische Auswertung der eingefrorenen Spannungen · Der Modellwerkstoff für das Einfrierverfahren · Die Durchführung des Einfrierverfahrens mit Araldit B · Die Übertragung der Ergebnisse: Strenge, erweiterte und angenäherte Ähnlichkeit · Erweitertes statisches Ähnlichkeitsgesetz für den allgemeinen räumlichen Spannungszustand · Erweitertes statisches Ähnlichkeitsgesetz für den ebenen Spannungszustand · Erweiterte Ähnlichkeitsgesetze für Sonderprobleme · Die Wahl der Maßstäbe · Abschätzung der Maßstabfehler.

Zweiter Abschnitt:

Übersicht über besondere Verfahren der Spannungsoptik: Das Reflexionspolariskop · Weitere Verfahren zur vollständigen Auswertung des ebenen Spannungszustandes · Untersuchung von Platten · Untersuchung von Schalen · Besondere Verfahren zur Untersuchung räumlicher Spannungszustände · Dynamische Untersuchungen · Spannungsoptik jenseits der Elastizitätsgrenze (Photoplastizität).

Dritter Abschnitt:

Praktische Anwendung der Spannungsoptik: Der Spannungszustand in Zahnrädern · Spannungen in Fundamenten · Plexiglashaube unter äußerem Überdruck · Rohrverzweigung unter Innendruck · Modellherstellung · Versuchsdurchführung · Auswertung der eingefrorenen Spannungen · Untersuchung der Saugschlauchdecke eines Mittelblockes des Donaukraftwerkes Jochenstein · Windscheibe eines Stahlbeton-Skelettbaus · Untersuchung des Spannungszustandes an einer Staumauer mit Hilfe eines Modells aus Gelatine · Untersuchung von Stahlbetonbauteilen durch bewehrte Modelle · Nachprüfung des ST. VENANTschen Prinzips mit Hilfe der Spannungsoptik · Elastische Spannungszustände in Körpern mit ebenen Schnitten.

Literatur · Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG